ISSN: 1665-5826

Educación Matemática

México • vol. 26 • núm. 3 • diciembre de 2014

Comité editorial

La publicación de este número de EDUCACIÓN MATEMÁTICA fue posible gracias al apoyo del Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav, México.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (Mathematics Didactics Database), Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en: revedumat@yahoo.com.mx y aliavi@prodigy.net.mx.

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 26 • núm. 3 • diciembre de 2014*

Contenido

© Educación Matemática, vol. 26, núm. 3, diciembre de 2014, es una publicación de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Guty Cárdenas 121-B, Col. Guadalupe Inn, 01020, México D.F. Certificado de Licitud de Título número 12499 y Certificado de Licitud de Contenido número 10070, expedidos por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Registro número 3012 de la Cámara Editorial de la Industria Editorial Mexicana.

Editor responsable: Alicia Ávila Storer. Reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102 expedido por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor. ISSN 1665-5826.

Editorial

En la actualidad, las revistas de investigación en español llegan a sus lectores principalmente a través de los sitios de acceso libre. La distribución en papel es cada vez más escasa y compleja y, sin duda, se ha generado una cultura de lectura en estos sitios u otros que ponen a disposición los materiales publicados. Tal es el caso de EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Algunos de los sitios de acceso libre tienen especial relevancia para los lectores de habla hispana. Por ejemplo, Scielo-México –asociado a la Scientific Electronic Library On-Line (SciELO http://www.scielo.org)– es una hemeroteca conformada por las colecciones de revistas de investigación de quince países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, España, México, Paraguay, Perú, Portugal, Sudáfrica, Uruguay y Venezuela. En Scielo se detalla el número de veces que los artículos son citados en otras revistas de esta hemeroteca. La hipótesis principal que sustenta este servicio es que el número de citas mide la influencia que un artículo tiene sobre el trabajo y la producción científica de otros colegas; a través del conjunto de citas se mide el impacto regional e internacional de una revista científica.

Otros sitios, como Redalyc –Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal www.redalyc.org.mx–, también de acceso libre, realizan un conteo por país y región del número de "descargas" mensuales que tienen los artículos de las revistas ahí alojadas. Una cuestión interesante y útil para los que participan en la conformación de las revistas (autores y editores) es que Redalyc informa el número de descargas de cada uno de los artículos incluidos en su sitio, así como las regiones y países donde se descargan.

En lo que sigue exponemos y comentamos las descargas que se hacen de EDUCACIÓN MATEMÁTICA desde Redalyc. Los datos corresponden solo a los años 2012 y 2013 porque son los proporcionados por el sitio a estas fechas.

Una primera cuestión a destacar es que el promedio de descargas mensual de EDUCACIÓN MATEMÁTICA es alrededor de 5 000 y que prácticamente se consultan todos los números; es una excepción que alguno deje de consultarse en un mes. En ocasiones el número de descargas mensual llega a 10 000. Es decir que las distintas orientaciones y objetivos de las investigaciones y contribuciones a la docencia publicados encuentran lectores interesados. El número que alcanzó más descargas, en el periodo 2012-2013, tuvo un total de 23 362.

Otro punto digno de subrayarse es que EDUCACIÓN MATEMÁTICA se consulta en toda América y varios países europeos. Catorce países la consultan sistemáticamente. En Estados Unidos, Canadá, España, México y Argentina se hace el mayor número de descargas; en otros países latinoamericanos y europeos la consultan con cierta asiduidad. China y Japón registran un pequeño número de descargas anual.

Estos datos de lectura, sin duda, revelan el interés por las temáticas que difunde Educación Matemática; además reflejan la actualidad de sus contenidos y la posible influencia que, a través de sus lectores, ejerce en distintas regiones del mundo. El tipo de artículos más consultados nos permite suponer que nuestra revista es una fuente de consulta no solo para los investigadores del campo, sino también para quienes enseñan matemáticas, a la que se recurre buscando respuestas a interrogantes académicas producto de la reflexión, a retos que plantea la enseñanza, o a nuevas ideas que permitan situarse en el punto adecuado para emprender nuevas investigaciones.

El Comité Editorial

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

La relación con el saber. Un estudio con adultos que inician la escolaridad

Claudia Broitman y Bernard Charlot

Resumen: Presentamos parte de un estudio dirigido a conocer la relación con el saber matemático y los conocimientos aritméticos de alumnos adultos que inician la escolaridad primaria. Analizamos diferentes fuentes de movilización de los alumnos para ir a la escuela y aprender matemática, el rol de algunas figuras que han sido decisivas en sus relaciones con el saber y sus perspectivas sobre el origen de sus conocimientos matemáticos. Se explicitan aquellos conceptos sobre la relación con el saber que son usados como herramientas de relevamiento y análisis de los datos. El estudio simultáneo de la relación con el saber y de los conocimientos matemáticos permitió enriquecer la mirada sobre las matemáticas de los sujetos entrevistados y reconocer cómo atribuyen significados personales a sus matemáticas en interacción con sus historias de vida. Algunos resultados de esta investigación interpelan perspectivas didácticas vigentes en la enseñanza de la matemática a adultos.

Palabras clave: relación con el saber-adultos-escolaridad primaria-matemáticas.

The relationship with knowledge. A study with adults that start schooling

Abstract: We present part of a study to determine the relationship with mathematical knowledge and numeracy of adult students who enter primary school. We analyze different sources of mobilizing students to go to school and learn mathematics, the role of some figures that have been instrumental in its relations with the knowledge and perspectives on the origin of their mathematical knowledge. Those concepts about the relationship to knowledge that are used as tools for gathering and analyzing data are explained. The simultaneous study

Fecha de recepción: 23 de agosto de 2014; fecha de aceptación: 7 de noviembre de 2014.

of the relationship to knowledge and mathematical knowledge allowed enrich the look on the mathematics of the interviewed subjects and recognize how they attributed personal meanings to their mathematics in interaction with their life stories. Some results of this research interpellate existing educational perspectives in teaching mathematics to adults.

Keywords: relationship to adults know-primary school mathematics.

Le rapport au savoir. Une étude auprès d'adultes qui commencent leur scolarité

Résumé: Le texte présente une partie d'une recherche visant à connaître le rapport au savoir mathématique et les connaissances arithmétiques d'élèves adultes qui commencent la scolarité primaire. Il analyse les différentes sources de mobilisation des élèves pour aller à l'école et apprendre les mathématiques, le rôle de quelques figures qui ont été décisives dans leur rapport au savoir et ce qu'ils disent sur l'origine de leurs connaissances mathématiques. Sont explicités les concepts relatifs au rapport au savoir qui ont été utilisés comme outils de collecte et analyse des données. L'étude simultanée du rapport au savoir et des connaissances mathématiques permet de mieux connaître le regard que les sujets interrogés portent sur les mathématiques et comment ils attribuent des significations personnelles aux mathématiques qu'ils ont construites en interaction avec leurs histoires de vie. Certains résultats de cette étude interpellent des perspectives didactiques en vigueur dans l'enseignement des mathématiques aux adultes.

Mots-clés: rapport au savoir-adultes-scolarité primaire-mathématiques.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas a jóvenes y adultos con bajos niveles de escolarización es un tema de preocupación en Latinoamérica dada la gran cantidad de personas que no están alfabetizadas o que no han finalizado la escuela primaria. Los jóvenes y adultos que inician o retoman la escuela cargan con trayectorias escolares irregulares de asistencia interrumpida o abandono de la escuela, en general debido a una inserción temprana en el mundo del trabajo. Sin embargo, sus historias de vida les han permitido construir no solo una gran variedad de recursos matemáticos, sino también una perspectiva sobre sus matemáticas.

Se trata de personas que decidieron estudiar y, por lo tanto, están movilizadas en un proceso de aprendizaje. Construyeron recursos para resolver situaciones con números, medidas y operaciones en el mundo social cotidiano; conocimientos que pudieron haber sido elaborados en una lógica diferente de la que rige el universo matemático escolar, y pueden ser al mismo tiempo puntos de apoyo o fuentes de obstáculos para un estudio más formal.[1] Pero aprender no es solo construir o adquirir conocimientos; es también formarse y por lo tanto cambiar, es entrar en nuevas relaciones con el mundo, con los otros y consigo mismo.

En el estudio que presentamos nos hemos preguntado por el origen y el sentido de los conocimientos de los que disponen, la visión de sí mismos al usar o producir conocimientos matemáticos, así como la imagen que tienen de las matemáticas escolares. Nos interesó develar cuáles son los sentidos de aprender matemáticas para ellos y comprender cómo se constituyeron y transformaron esos sentidos; para ello hemos apelado a la perspectiva de la *relación con el saber*.

RELACIÓN CON EL SABER: LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO

La cuestión de la relación con el saber es antigua. Aparece en la historia de la Filosofía, por ejemplo en Platón, Descartes, Hume, Kant, Hegel, etc., aunque no designada con ese nombre. La expresión *relación con el saber* aparece en los años sesenta del siglo XX en textos de psicoanalistas y en la década de los setenta en investigaciones de sociólogos. Aparentemente, Lacan fue el primero en usarla en 1966 (Beillerot, 1989); en 1970, Bourdieu y Passeron se refieren a "relación con la cultura" y "relación con el lenguaje y el saber" (Charlot, 2003). Sin embargo la problematización de la relación con el saber es producida en el campo de las Ciencias de la Educación: desde una perspectiva más sociológica y antropológica por Charlot y desde un abordaje psicoanalítico por Beillerot (1989). Charlot evoca la cuestión por primera vez en textos de 1977 y 1978 dedicados a la Matemática, usa la expresión a partir de 1979 y, en 1985, titula su tesis de doctorado *Du Rapport social au savoir (De la relación social con el saber).* Beillerot organiza un libro sobre esta noción en 1989 y los primeros estudios de campo sobre la relación con el saber son publicados en los años noventa por Charlot, Beillerot y sus grupos de investigación.

A pesar de que el concepto ha sido construido en otros campos, hoy pertenece también a la Didáctica. Así, entre los cuarenta conceptos presentados por el *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*, organizado por Yves Reuter y publicado en 2010, aparece "*Rapport à*" (relación con), enfocando la

[1] Si bien los niños también elaboran conocimientos antes de su entrada a las matemáticas escolares, reconocemos mayor diversidad en los de los adultos debido a la amplitud de experiencias extraescolares.

cuestión de la relación con el saber con la exigencia didáctica de que esa relación sea específica, como en la investigación de Barré de Miniac sobre la relación con la escritura (Barré de Miniac, 2000). ¿Por qué es actualmente válido considerar la "relación con el saber" como un concepto fundamental de la didáctica contemporánea? En primer lugar estudios y conceptos nacidos en la Didáctica de la Matemática y de las Ciencias son pertinentes en la problemática de la relación con el saber. Es el caso de los trabajos de Bachelard sobre obstáculos y rupturas epistemológicas, y de las investigaciones sobre "representaciones" y "concepciones" que ellos incentivaron. Del mismo modo los conceptos de contrato didáctico y de situación didáctica (Brousseau) y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud) resultan compatibles para ser tomados en investigaciones sobre la relación con el saber. En segundo lugar, investigadores en Didáctica de Ciencias y de Matemática se interesaron por el concepto: en 1977 y 1978, Giordan utiliza el concepto para hablar de la actitud de poseedores que docentes y estudiantes pueden tener con el saber (Charlot, 2003; Giordan, 1977, 1978). La noción se impone en Didáctica de Matemática a partir de un texto de Chevallard publicado en 1989 y le permite prolongar sus reflexiones sobre la transposición didáctica, ya que el saber cambia de forma cuando pasa de una institución a otra; por ejemplo cuando es transpuesto de una institución científica a una institución escolar. Quien pretende apropiarse de un saber debe entrar en una forma de relación con el saber que valoriza la institución que lo propone, o bien las relaciones personales con el saber pueden entrar en tensión con las relaciones institucionales con el saber.

La propia historia del concepto de relación con el saber evidencia que su significado sobrepasa los asuntos didácticos y es, al mismo tiempo, pertinente para investigarlos.

RELACIÓN CON EL SABER: UNA PROBLEMÁTICA MULTIRREFERENCIAL

¿Cuál es entonces el significado del concepto de relación con el saber? Pueden proponerse varias definiciones. El *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques* escogió una definición sintética:

> La relación con el saber es el conjunto de relaciones que un sujeto mantiene con un objeto, un "contenido de pensamiento", una actividad, una relación interpersonal, un lugar, una persona, una situación, una ocasión, una obli-

> gación, etcétera, ligados de alguna manera con el aprender y con el saber. Por lo mismo, es también relación con el lenguaje, relación con el tiempo, relación con la actividad en el mundo y acerca del mundo, relación con otros, y relación consigo mismo como más o menos capaz de aprender tal cosa, en tal situación (Charlot, 2007, p. 131).

Si bien puede ser útil contar con una definición, parece más importante inscribir el concepto de relación con el saber en una red de conceptos. Una definición presenta un punto de llegada, mientras que muchas veces son las cuestiones de partida y el camino recorrido los que esclarecen el significado de un concepto. "Relación con el saber" es un marco problemático, una manera de plantear preguntas acerca de la educación y la formación. A veces se encuentra en el discurso de los profesores o investigadores jóvenes que un estudiante ha fracasado "porque no tiene relación con el saber". Por condición antropológica, cada ser humano tiene una relación con el saber (Charlot, 2007, 2013). Incluso quien odia las matemáticas tiene una relación con ellas: una relación negativa, el rechazo; mientras que el aprendizaje implica una relación positiva, una apreciación, un deseo. Se trata de relaciones diferentes con el saber que no pueden reflejarse en la dicotomía tener/no tener.[2]

Es posible identificar por lo menos cinco abordajes de la cuestión de la relación con el saber: pedagógico, psicoanalítico, sociológico, antropológico y didáctico.[3]

Desde el punto de vista pedagógico, es central la cuestión de la *movilización* en una actividad intelectual y, luego, la del sentido de lo que se aprende y del placer generado por esa actividad. El concepto de movilización implica la idea de movimiento desde el interior (a diferencia de la idea de motivación, que implica que el sujeto es motivado por alguien o algo desde el exterior). Movilizar implica poner los propios recursos en movimiento, hacer "uso de sí mismo como un recurso" (Charlot, 2007), lo que involucra la idea de investirse a sí mismo. Desde la perspectiva de la "relación con el saber" es importante comprender los móviles de la movilización, las razones que llevan a un sujeto a ponerse en actividad, en movimiento, a investirse. Solo aprende quien se moviliza en una actividad intelectual: quien "estudia". ¿Por qué una persona realiza ese esfuerzo? ¿Para un determinado sujeto, cuál es el sentido de estudiar, aprender, comprender, saber o

[2] El único caso en que una persona no tiene ninguna relación particular con un saber es cuando ese conocimiento no aparece de ninguna manera en su universo.

[3] El orden presentado solo tiene sentido en el contexto de este artículo. Aquí se ha dejado la cuestión didáctica al final porque es central en este texto y merece ser ilustrada por los otros abordajes.

de negarse a estudiar? La cuestión de la actividad no involucra solo la eficacia o la eficiencia de lo que se realiza (como a veces se investiga en la didáctica clásica). Es también el sentido de esa actividad, como condición y efecto de ella. No se trata solo de adentrarse en una actividad sino de persistir en ella, dado que aprender requiere un compromiso temporal. Solo sigue estudiando quien encuentra alguna forma de placer en esa actividad, placer que puede estar en el propio esfuerzo exigido o bien en la representación de los efectos deseables que podrían proceder de cierta actividad. Sean cuales fueran las situaciones, aprender requiere siempre actividad, sentido y placer. Podría considerarse que se trata de una "ecuación pedagógica" fundamental.

Volvamos a un interrogante que atraviesa el origen de nuestro estudio: ¿cómo enseñar matemáticas a adultos involucrados en un proceso de escolarización? Aun cuando traten con números y operaciones les será preciso apropiarse de nuevas formas de actividad intelectual, diferentes de las que despliegan para sobrevivir en un mundo cotidiano. Se trata también de analizar cuáles sentidos le confieren a esa situación nueva de aprendizaje más formal de la Matemática e, indisociablemente, cuál es el placer que puede sustentar su movilización. ¿Cómo se construye el sentido y el placer de estudiar matemáticas de la escuela primaria cuando se es joven o adulto? Porque si no se construye ese sentido y ese placer el adulto que estudia acabará por desistir. Esta pregunta no implica considerar el sentido como meramente inicial. Obviamente, un sentido debe existir al comienzo del proceso –porque si no ese adulto no se matricularía–, pero qué va a suceder depende también de aquello que se vivencia en el propio proceso de aprendizaje y por lo tanto de la propuesta de enseñanza. Por ello la cuestión de la constitución del sentido y del placer no debería estar afuera de las preocupaciones didácticas.

El enfoque pedagógico de la relación con el saber lleva a la cuestión del deseo, es decir a un enfoque psicoanalítico (Beillerot *et al.,* 1989, 1996). La movilización intelectual implica un "uso de sí mismo" que sólo se produce cuando fue activada por un deseo que le otorga su energía. Pero ¿cómo se puede desear un objeto matemático? El deseo busca su propia satisfacción –explica el psicoanálisis– pero, ¿cómo la numeración y las operaciones aritméticas pueden satisfacer el deseo (desde la profundidad que le da el psicoanálisis a este concepto)? Para entenderlo, es preciso tomar en cuenta lo que el psicoanálisis nos enseña: el deseo precede al objeto deseable. No se desea un objeto porque es deseable; se vuelve deseable porque el deseo necesita un objeto. Hay una historia singular, en gran parte inconsciente, del deseo y sus avatares. Y entre los objetos que pueden volverse "deseables" está el conocimiento en general y, más específicamente, las matemáticas.

¿Qué deseos sustentan la movilización de los adultos para aprender matemáticas?, ¿deseos de qué o de quién? Creemos poco probable –y nuestros datos así lo corroboran– que se trate apenas del deseo de dominar instrumentos matemáticos para tornarse más eficaz en algunas actividades cotidianas. Sin duda el argumento de la utilidad forma parte de las respuestas en las argumentaciones de quiénes retoman sus estudios primarios, pero siempre el deseo es, de forma más o menos disfrazada, deseo por otro o deseo por sí mismo. A través de los objetos matemáticos, ¿qué otros objetivos tienen los adultos?

Los seres humanos nos movemos por el deseo, pero somos también, e indisociablemente, seres sociales (Charlot, 2007, 2008, 2013). Las primeras reflexiones e investigaciones de Charlot trataban sobre la relación *social* con el saber, con base en un análisis crítico de la Sociología de la Reproducción. La correlación estadística entre las tasas de éxito o fracaso escolar y el lugar en las jerarquías socioeconómicas no deja ninguna duda: hay desigualdad social frente a la escuela. Sin embargo, se encuentran alumnos de sectores populares con éxito en la escuela y niños que fracasan en ella y son de clase media, si bien es cierto que ambas constituyen minorías. Si la escuela "reproduce" la jerarquía social, ¿por qué y cómo estas dos minorías escapan de la probabilidad estadística? Otra forma de cuestionar el supuesto determinismo se refiere a las matemáticas. Cuando se trata de la lengua materna, de la historia e incluso de la biología, podemos entender intuitivamente por qué los hijos de la clase media, que "heredan" el "capital" cultural de sus padres (en términos de la gran metáfora de Bourdieu y Passeron), tienen más éxito en la escuela que los niños que nacen en familias populares. Pero, ¿por qué tendrían más éxito también en Matemática, a pesar de que poco se habla de Matemáticas en las cenas familiares de la clase media?

Pensamos que lo que produce la desigualdad social frente a la escuela es, fundamentalmente, la relación con el saber (con la escuela, con el lenguaje, con el tiempo, etc.) construida en la familia y en el medio social de la infancia. De alguna manera, esa es la respuesta fundamental de Bourdieu y Passeron (1970). ¿Pero acaso esa relación puede cambiar? No, responden Bourdieu y Passeron, porque la sociedad dominante no tiene ningún interés en cambiarla (Bourdieu y Passeron, 1970, p. 160; Charlot, 2003). Y porque esas relaciones están incorporadas en el hábitus –conjunto de disposiciones psíquicas socialmente construidas que estructuran las prácticas y representaciones–, cuyas transformaciones nunca fueron esclarecidas por Bourdieu, aun cuando admitiese esa posibilidad. En ese espacio problemático opera el abordaje sociológico de la relación con el saber desarrollado por Charlot y su grupo de investigación: la relación con el saber es socialmente construida, pero no existe determinismo sociológico. Siendo sujeto humano quien aprende, o quien quiere aprender, puede cambiar sus relaciones con el saber, por más difícil que sea.

Los adultos que inician o que retoman su escolaridad ocupan un lugar social, son albañiles, trabajadores independientes, empleadas domésticas, entre otros. Su relación con el saber está enraizada en una posición y una actividad social. ¿Qué sucede cuando ellos, en tanto portadores de contextos sociomatemáticos implícitos, ingresan en un espacio de aprendizaje formal que pretende ser epistemológicamente universalista y sociológicamente neutro? ¿Qué ocurre en un proceso didáctico con sus identidades? En otros términos: ahora que conozco la "verdadera" matemática que se enseña en las escuelas, ¿quién soy? o ¿en quién me estoy transformando?

Cada uno de nosotros es un ser singular, insustituible, con su vida, su historia, su psiquis, movido por sus propios deseos. Cada uno de nosotros es también un ser social, construyó una familia o un sustituto de ella, es miembro de grupos y por lo tanto comparte con otros ciertos valores y categorías de interpretación del mundo. Si el proceso didáctico desconoce la singularidad del alumno, se torna burocrático, miope, repetitivo y fracasa; pero si olvida su dimensión social, cae en una ilusión subjetivista y también fracasa. La teorización de la relación con el saber invita a pensar de manera simultánea la singularidad y la sociabilidad del ser humano; lo que requiere una reflexión antropológica (en el sentido de la Antropología Filosófica). La cría del hombre nace incompleta, pero nace en un mundo humano construido por las generaciones anteriores. Por lo tanto, la educación es un triple proceso de humanización; de socialización e ingreso en una cultura; y de singularización/subjetivación: un proceso por medio del cual el niño se apropia de una parte del patrimonio humano, de esa parte que está disponible en el lugar y la época en la que nace, y se torna un sujeto insustituible (Charlot, 2013). En otros términos, la educación es el encuentro de tres historias: la de la especie humana, la de una determinada sociedad en cierto momento y la de un sujeto singular. Estas tres vertientes del proceso educacional son indisociables, pero pueden entrar en contradicción (por ejemplo, cuando una costumbre social hiere la dignidad humana de algunos miembros del grupo o cuando un sujeto rechaza a su grupo).

Cuando un adulto ingresa en las matemáticas más formales de la escuela, entra en nuevas formas de dignidad (humana, social, cultural) que aumentan su autoestima y, a la vez, enfrenta amenazas a sus identidades sociales y subjetivas ya construidas. ¿Qué tendrá más valor: la matemática que la escuela enseña o las prácticas sociomatemáticas que los adultos usaron antes de entrar en un proceso de escolarización? ¿O ambas tendrán valor desde puntos de vista diferentes? El abordaje antropológico lleva también a prestar atención a los fenómenos de concurrencia entre varias formas de aprender y saber. En efecto, el patrimonio humano no está constituido apenas por categorías de interpretación del mundo y por enunciados cotidianos o científicos, sino también por gestos, prácticas, formas de interacción, sentimientos, etc. La relación con el saber, e incluso la relación con las matemáticas escolares, es solo una entre varias relaciones con "el aprender" (Charlot, 2007).

Los diversos modos de plantear la cuestión de la relación con el saber interesan a la Didáctica. Sin embargo resulta necesario resaltar una cuestión propiamente didáctica: la de la construcción del Yo epistémico a partir del Yo empírico. El Yo empírico es el sujeto de la experiencia singular, temporal, cotidiana; aquel que valoriza el saber que produce efectos inmediatos y la actividad placentera. El Yo epistémico, que la Filosofía llama de Entendimiento o de Razón, es el sujeto universal capaz de apropiarse de enunciados descontextualizados, validables en un sistema. La escuela recibe niños, adolescentes, a veces adultos y ella debe hacer que se tornen *alumnos*. La escuela debe tener en cuenta las especificidades y singularidades de aquellos a quienes enseña y a la vez hacer un esfuerzo por superarlas.[4]

En el proceso de enseñanza formal, todo docente tiene que enfrentar ese desafío, sea cual sea la materia que enseña. En efecto, ese proceso descontextualiza y ofrece saberes-objetos con otras formas de existencia y de lenguaje (Charlot, 2007). Incluso el profesor de Educación Física descontextualiza y habla, al menos parcialmente, al Yo epistémico: quien pelea en la calle es el Yo empírico; quien lucha en el salón de deportes es un Yo epistémico, que respeta reglas. La matemática es la materia escolar en la que es mayor la ambición de expurgación de lo empírico, de explicitación total del enunciado y de sistematización integral del saber. En el ideal matemático el objeto solo existe como un conjunto construido de relaciones. En las matemáticas, aún más que en otras disciplinas,

[4] Usamos "alumno" en el sentido de estudiante en posición subjetiva de aprender. En ocasiones, en Didáctica de Matemática se utiliza "sujeto alumno" para oponerse a la idea de "sujeto matemático", como un sujeto que no se involucra intelectualmente en la resolución de un problema, sino que actúa como efecto de las restricciones del contrato didáctico. En este caso no oponemos "alumno" con un sujeto que despliega una actividad intelectual autónoma.

el Yo epistémico, o sea el alumno en cuanto tal, no es dado, es construido en el proceso de enseñanza. Esa es una de las ambigüedades y dificultades fundamentales de la enseñanza y, en particular, de la enseñanza de la matemática: el alumno es al mismo tiempo y contradictoriamente una condición de posibilidad y su objetivo fundamental.

Los diversos abordajes de la relación con el saber no constituyen un sistema, con la arquitectura ordenada y unificada que implica esa palabra, pero convergen porque todos ellos remiten a tres principios transversales:

- *Primer principio*. No hay saber sin una relación con el saber. Cada forma de saber (y, de forma más amplia, de "aprender"), incluido el saber científico y matemático, requiere un sujeto asumiendo cierta relación con ese saber. No hay saber "en sí", independiente de la forma de relación con el saber que permite construirlo o apropiarse de él. Una consecuencia de esta afirmación es reconocer que la Didáctica no puede desconocer la cuestión de la relación con el saber.
- *Segundo principio*. Siempre la relación con el saber tiene al mismo tiempo una dimensión epistémica (¿qué significa "aprender" cuando se trata de aprender "eso"?) y una dimensión identitaria (¿quién soy yo?, ¿soy capaz de aprender "eso" o fracasaré?). Y tiene también una dimensión social que es transversal y envuelve a las dos dimensiones anteriores.
- *Tercer principio*. Siempre la relación con el saber es también una relación con el mundo, con los otros y consigo mismo. Aprender es cambiar de mundo, de ambiente y a sí mismo e involucra la tensión de cómo permanecer, a la vez, fiel a sí mismo, sin sentimientos de traición.[5]

Estos tres principios funcionan tanto para alumnos niños como para alumnos adultos, pero no pueden funcionar de la misma forma en ambos casos. ¿De qué diversas maneras se expresarán para adultos que inician un proceso de escolarización y se encuentran con las matemáticas escolares?

[5] Ciertos alumnos inmigrantes de sectores populares viven el aprendizaje formal en la escuela como una traición a sus padres u orígenes culturales (Charlot, 2008).

PERSPECTIVA METODOLÓGICA

El estudio al que nos referimos fue una investigación cualitativa de carácter exploratorio mediante un estudio de casos.[6] Metodológicamente, el estudio de casos se justifica porque lo que se buscó fue analizar en profundidad la historia de los conocimientos matemáticos de cada sujeto y la construcción de una relación particular con ese campo de saber, así como relevar el estado de sus conocimientos aritméticos. Seleccionamos cinco casos intentando la mayor heterogeneidad posible entre algunas variables que consideramos a priori que podrían tener cierta influencia en los conocimientos disponibles y en los vínculos con el saber matemático: género, edad, desempeño laboral, asistencia previa a la escuela, familiares a cargo en edad escolar y alfabetización. Como nos interesaba también observar las clases donde los sujetos funcionaban como alumnos, tomamos la decisión de que fueran del mismo grupo escolar. Los datos se tomaron en 2009 en una escuela nocturna de adultos del barrio Villa Urquiza de la ciudad de Buenos Aires. De las cinco personas, tres eran mujeres y dos hombres; dos se consideraban a sí mismos no alfabetizados y tres tenían lectura y escritura autónoma. Las edades variaban entre los 18 y los 56 años; algunos tenían hijos o nietos en edad escolar y otros no; algunos habían ido a la escuela primaria y otros no. Sus trabajos eran variados: empleada doméstica, albañil, empleado de mantenimiento.

Estos casos no se consideran representativos de las maneras diferentes de relacionarse con el saber matemático, sin embargo son significativos en tanto nos permiten atrapar procesos particulares y contribuyen a una comprensión más profunda de problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en adultos que inician la escuela primaria.

Para este estudio se combinaron dos estrategias metodológicas diferentes: entrevistas y observaciones de clases. Se trató de entrevistas cara a cara, semiestructuradas, con un guión dirigido a incluir tópicos previstos. Las entrevistas se desarrollaron en aulas de la escuela asignadas por la directora en las que no había prevista en ese turno ninguna actividad formal. Los horarios eran acordados con cada entrevistado. Por medio de varias entrevistas con cada sujeto se buscó conocer su historia escolar, laboral y familiar, indagar su relación con el saber matemático a través de sus experiencias extraescolares y escolares en las que reconocía haber usado exitosamente conocimientos matemáticos o en las

[6] La investigación a la que hacemos referencia constituyó la tesis doctoral de Claudia Broitman dirigida por Bernard Charlot y codirigida por Mirta Castedo (Broitman, 2012).

que estos resultaron insuficientes, cuál era la imagen de sí mismo como usuario de las matemáticas, como alumno de matemáticas, qué conocimientos quería aprender y las razones, y cuáles eran sus ideas sobre el trabajo matemático, el fracaso y el éxito en matemática en la escuela.

Algunas preguntas estaban dirigidas a relevar datos generales, historia escolar y una primera aproximación a las matemáticas usadas en el mundo laboral, por ejemplo: ¿Fue a la escuela de niño o de adulto? ¿Por qué y cuándo dejó? ¿Por qué vuelve o empieza ahora? ¿Alguno de sus familiares fue o va a la escuela? ¿En alguno de sus trabajos aprendió algo de matemática? ¿En alguno de esos trabajos le servía o usaba algo de matemática?

Otro grupo de preguntas estaba dirigido a indagar la relación con el saber matemático y las concepciones de matemática y de matemática escolar.[7] Por ejemplo: ¿Para qué piensa que se enseña y aprende matemáticas en la escuela? ¿Cree que hay alguna relación entre ser joven o adulto, o ser hombre o mujer, y saber o aprender matemáticas? ¿Tiene familiares o conocidos que crea que son buenos en matemáticas? ¿Qué debe hacer un buen maestro de matemática? ¿Qué es necesario para aprender algo nuevo de matemática en la escuela?

Con la intención de relevar las concepciones de sí mismo como matemático, como usuario de matemática, como alumno de matemática se formularon otras preguntas, entre ellas: ¿Usa matemática fuera de la escuela?, ¿cuándo?, ¿dónde? ¿Y en su trabajo? ¿Dónde aprendió lo que sabe de matemática? ¿Recuerda alguna situación en la que se sintió bien porque le salía algo de matemática o en la que inventó una manera de resolver un problema y le dio placer o alegría? ¿Y alguna situación en la que se sintió mal porque no sabía algo de matemática? ¿Qué le gustaría aprender de matemática en la escuela?

Por último, se previeron entrevistas con el fin de relevar conocimientos matemáticos a través de la resolución de ciertos problemas y de la reflexión sobre ellos. Si bien en el presente trabajo no profundizaremos sobre estas cuestiones, aclaramos que la metodología utilizada incluyó momentos de exploración crítica en los que se intentó capturar aspectos de los procesos constructivos, comprender el origen de algunos errores y la lógica de los sujetos frente a los conflictos que enfrentaban. Intentamos que en la resolución de problemas matemáticos de numeración y cálculo los entrevistados tuvieran la oportunidad de resolver situaciones que les involucraran cierto desafío, que pudieran disponer de un

[7] Algunas de estas preguntas han sido adaptadas de Silva (2009) y de una investigación dirigida por Charlot, "Relações com os saberes", del Grupo Educação e Contemporaneidade de la Universidad Federal de Sergipe, Brasil.

tiempo para su exploración, que decidieran sus procedimientos y maneras de representación, y que analizaran la validez de los resultados obtenidos. Las observaciones de clases permitieron complementar la mirada de cada alumno analizando sus posiciones personales en debates e intercambios grupales o colectivos.[8]

El *corpus* de datos de este estudio estuvo constituido por 19 sesiones de entrevistas de aproximadamente un total de 9 horas de duración y 8 clases de matemática de un total de 8 horas y media de duración, notas manuscritas realizadas durante observaciones de clase y entrevistas, y producciones de los alumnos.

RAZONES PARA ESTUDIAR

El análisis de la relación con el saber implica una lectura "en positivo". Esto significa asumir una postura epistemológica y metodológica en la que la pregunta es qué le pasa al alumno, qué actividad pone en marcha, qué sentido tiene la situación para él, qué tipo de relaciones mantiene con los otros a propósito del mundo escolar y no lo "que le falta". Nos hemos preguntado cuáles son los sentidos de estudiar y de aprender para aquellos que no fueron o no terminaron la escuela cuando niños. Encontramos en los adultos entrevistados diferentes móviles para asistir a la escuela, para aprender y estudiar matemática. Veamos cuatro ejemplos que nos muestran cómo los móviles están profundamente anclados en sus historias personales.

[8] De manera muy sintética –dado que no constituye el objeto de este artículo– compartimos que los cinco adultos entrevistados, independientemente de sus niveles de alfabetización, leen y escriben convencionalmente números de varias cifras y manejan con comodidad la escritura de números "redondos". Algunos errores que aparecen en la escritura de números de varias cifras no redondos obedecen a la puesta en acto de la hipótesis implícita acerca de que la numeración escrita refleja la numeración hablada o a la confusión entre las denominaciones de números redondos de un orden mayor o menor. Todos recurren al análisis de la posicionalidad para determinar el valor relativo de las cifras frente a problemas que exigen componer o descomponer cantidades en billetes y monedas de \$100, \$10 y \$1, aunque sus conocimientos sobre el valor posicional no se circunscriben al contexto del dinero (Broitman, 2013). Resuelven problemas sencillos que involucran diferentes operaciones –aun cuando no necesariamente utilicen la más económica– mientras los números involucrados habiliten cálculos orales. Descomponen y componen los números en unidades seguidas de ceros para sumar y restar –de manera exacta o aproximada– poniendo en acto de manera implícita propiedades de las operaciones y regularidades de la serie numérica. Los adultos entrevistados conocen los algoritmos de suma y resta aunque el éxito en la utilización de estas técnicas es parcial, y limitado dada cierta pérdida del control de los pasos intermedios, como ha sido relevado en otros estudios (Delprato 2002; Ávila, 2003). El análisis detallado de estos recursos matemáticos, sus transformaciones y de las tensiones que enfrentan los entrevistados se encuentra en Broitman (2012, cap. 5).

Estudiar para reparar el pasado

Isabel (53 años) no estudia para obtener un trabajo mejor porque considera que ya es grande para ello. Tampoco pretende tener una certificación de su escolaridad primaria. En ningún caso refiere a un conocimiento que quiera aprender en la escuela y que precise para desenvolverse en su vida familiar, laboral, ciudadana. Isabel no busca en la escuela obtener "algo" que no tiene ahora, ni cambiar su calidad de vida, ni abrir puertas para un futuro material mejor.

> **I:** *La edad para estudiar no tiene nada que ver, podés estudiar a la edad que quieras, no, pero... o sea, es mejor cuando uno es joven y estudia porque es como que, eh... tenés más oportunidades, porque vos decís: "Bueno, estudio esto quizás, eh... me recibo y ya tengo cosas para emprender, tengo otros sueños, otras metas", pero eh... ahora yo lo único que quiero es, este... aprender.*

Isabel estudia "solamente" porque quiere ir a la escuela. La frustración por no haber ido en su propia infancia constituye una movilización para sus deseos actuales. Sus vínculos con el aprender y el saber están atravesados por los otros con los que interactuó a lo largo de su vida y que constituyeron una mirada sobre su propia persona: Isabel no fue una niña "enviada" a la escuela y ahora ella es capaz de "enviarse a sí misma". Según ella no iba a la escuela como "todos los otros", como "hay que ir":

> **I:** *No tuve la oportunidad de que nadie me diga: "Estudiá, seguí adelante, progresá".*

Incluso en su vida adulta Isabel se considera excluida de la universidad:

> **I:** *Si hubiera tenido la oportunidad de estudiar, de ir a una secundaria, de ir, qué sé yo, a la UBA,*[9] *como todos fueron a estudiar, eh... hubiera... me hubiera recibido de profesora de matemática porque es lo que más me gusta.*

Isabel asiste a la escuela para disfrutar de ser alumna, para reparar su pasado o para repararse. Es capaz hoy de investirse a sí misma y otorgarse el

[9] Sigla con la que usualmente se menciona a la Universidad de Buenos Aires.

permiso y el derecho de estudiar que le ha sido negado y vulnerado durante su infancia.

Creemos que es posible encontrar muchos alumnos adultos que, como Isabel, asisten a la escuela a saldar una "asignatura pendiente" de su infancia. Esta clase de movilización nos permite desprendernos de un imaginario de asistencia a la escuela como medio para obtener "otra cosa", y pensar o comprender algunas trayectorias en las cuales la escuela es un fin en sí mismo, una "vieja deuda" con la propia historia.

Estudiar para defenderse en la ciudad

Claudio (18 años) ha vivido siempre en el campo y menciona el cambio de la vida rural a la vida urbana como posibilitador de estudios:

> **C:** *Entonces después mi hermano me dijo: "Estaba laburando*[10] *y después anduve sembrando", y justo que empezaron a sembrar falleció una de mis sobrinitas, y bueno y ahí justo fue mi hermano de acá de Buenos Aires y él ya cuando dijo: "Yo cuando vaya a fin de año yo te traigo para que vengas a laburar".*
>
> **C:** *A mí yo porque en el Chaco nunca se me dio la ocasión de estudiar y, porque siempre trabajaba y qué sé yo, como más laburaba en el campo con los tractores, poco... o sea pocas ganas tenía, me gustaba más el laburo que el estudio... porque, o sea, me gustaba más porque no tenía tiempo tampoco para estudiar. Yo laburaba desde las cinco de la mañana hasta las once, las doce de la noche, hasta que cambiaba el turno trabajando con el tractor, y después adónde iba a estudiar a esa hora, y entonces bueno. Acá en Buenos Aires me cambió todo, laburo nueve horas y bueno, después las otras horas vengo a estudiar y después a descansar.*

Mientras Claudio vivía en el campo el mundo del trabajo y el mundo de la escuela permanecían escindidos:

> **C:** *Y nosotros en el Chaco aprendemos, quieras o no quieras, aprendés a la fuerza.*

[10] *Laburar* es un término popular (del lunfardo) de la zona del Río de la Plata que significa "trabajar".

C: *Sí, hasta ahora, los de allá del Chaco, todos saben matemática, como te dije recién, sabemos matemática porque ese era el trabajo, defenderse nosotros con la matemática y es todo.*

Actualmente Claudio vive y trabaja en la ciudad, y ya "no se defiende": precisa aquello que la escuela pueda enseñarle.

C: [...] *Y ahora con, ahora, ahora acá, allá no se necesita tanto, pero acá me estoy dando cuenta que sí, la necesito un montón, con la... a la escuela la necesito más que nada.*

Para Claudio algo de lo que se enseña en el mundo de la escuela es necesario hoy para el mundo del trabajo. Ya los dos mundos no se encuentran tan escindidos como cuando vivía en el campo. La escuela le abre puertas para ser, como él mismo dice, "un tipo que sabe", es decir un hombre escolarizado y urbano.

C: *Por ahí salgo de este trabajo, me voy a trabajar qué sé yo, en un supermercado o en cualquier otro trabajo, y te va a hacer falta esa parte.*

En las aulas de adultos debe haber muchos otros como Claudio, que sintiendo que dominaban los conocimientos necesarios para su mundo anterior, se enfrentan ahora al impacto de nuevas exigencias.

Estudiar para crecer y ser más autónomo

Para Vicente (56 años) la escuela representa un crecimiento personal: escribir los presupuestos para su trabajo, dejar de depender de otras personas que escriban por él, tener registro de conductor, independizarse.

E: *Vicente, ¿por qué viene a la escuela?*

V: *Porque preciso, porque yo trabajo por mi cuenta, siempre tengo que estar molestando a alguien que me haga una boleta, porque yo pago todo, pago monotributo,*[11] *tengo boleta, tengo todo, y siempre tengo que estar pidiendo que me hagan una boleta, o que me escriban un presupuesto, y*

[11] El monotributo es el impuesto que pagan en Argentina los trabajadores independientes. Es usado aquí como expresión de trabajo organizado y en un marco de legalidad.

yo lo dicto al presupuesto, o que me escriban y después lo hago pasar por la compu, y bueno, preciso por todo eso.

V: *De repente yo no puedo poner mi empresa porque, bueno, me falta mucha lectura. Si no, yo ya me habría tratado de crecer más. Siempre me quedo ahí con ese temor: "No, porque tengo que asegurar los que trabajan conmigo, los tengo que poner en blanco", y todo eso ya preciso otra persona, otra segunda, ya para ir y pedirle: "Mirá, acompañame", o "Veme esto"; sin embargo, si yo estoy al tanto, que aprendí matemática, y a leer y a escribir bien, voy y encaro yo solo, no tengo por qué pedirle a nadie, eso sería ya desenvolverme yo solo.*

Vicente piensa que la escuela le abrirá nuevas puertas y le permitirá, como le ha dicho su primer patrón, "emplumar y volar". Quiere, como él mismo nos explica, "agarrar la cuchara".[12] Para Vicente la escuela habilita al progreso laboral y económico, al acceso a la información y otorga autonomía. La movilización de asistencia a la escuela es para él –y seguramente para muchos otros alumnos de las escuelas de adultos– un posibilitador de crecimiento personal, profesional y laboral.

Estudiar para ser mejor madre y esposa

Alicia (33 años) tiene una movilización diferente: ayudar a su hijo mayor –que también está iniciando la escuela primaria– con las tareas escolares y a su marido con el kiosco.[13] La escuela le permite terminar de armar una escena familiar deseada y completar o mejorar sus roles. Alicia ha sido testigo externa de intercambios familiares en torno al mundo escolar, tanto entre sus hermanos en la casa paterna como con los niños que cuidaba.

A: *Porque siempre estaba mi mamá, o sea, mi madrastra, porque cuando... tengo mis hermanos que sí fueron al colegio, que terminaron y todo eso, pero esos estaban con mi papá y mi madrastra. Y yo que estaba con mi mamá vine ya de grande y...*

[12] Expresión que significa tener poder.

[13] Kiosco se denomina en Argentina a un pequeño comercio informal de bebidas, golosinas o alimentos ligeros.

A: *Claro, porque yo siempre me sentaba con ellos* [los niños que cuidaba]. *Ellos siempre iban a la cocina, donde yo estaba siempre, en la cocina, donde está mi dormitorio y todo eso, y hacían, y yo siempre estaba con ellos. Porque la mamá venía retarde,*[14] *y bueno era yo más la que estaba con ellos. No le podía enseñar por supuesto, porque sabían. Yo le preguntaba, no les enseñaba yo.*

En estas escenas Alicia miraba de afuera la escolaridad, y ahora está feliz de poder generar escenas similares con su marido e hijo mayor en torno a las escuelas de ambos. Mientras asiste a su propia escuela está construyendo una imagen de sí misma como madre y esposa que pueda ayudar a su hijo y a su marido.

A: *Y si... por ejemplo, dividir... yo, o sea, hace poquito abrimos un kiosco con mi marido y dividir no lo sé hacer.*

A: [...] *Por ejemplo, si Martín* [su hijo de primer grado] *el día de mañana me lleva una tarea, y yo no lo sé hacer...*

La relación de Alicia con el saber tiene una dimensión identitaria ligada a los roles familiares: qué clase de madre y de esposa ha sido, es y quiere ser. Creemos que esta movilización para estudiar –la constitución de un nuevo aspecto de un rol familiar o el mejoramiento en la manera de ejercerlo– está presente en otros alumnos adultos que asisten a la escuela primaria.

Hemos intentado capturar algunos aspectos de la complejidad de sus propias movilizaciones, identificar sus movimientos más íntimos que los llevan a la escuela. Como señalamos antes, toda relación con el saber contiene una dimensión identitaria: aprender tiene sentido en relación con la historia de vida del sujeto, con sus expectativas, sus antecedentes, la imagen que tiene de sí mismo y aquella que quiere dar a los otros. Pero, a pesar de las diferencias en las movilizaciones para aprender e ir a la escuela, encontramos en común que la respuesta a por qué estudiar en nuestros casos no está apenas en un sentido utilitario. Parafraseándolos, estudian para "crecer", para "volar", para "activar la mente", para "ser un tipo que sabe", para que "mi hijo no tenga vergüenza", porque "Dios quiere que estudie", para "ayudar a mi marido", para "olvidarme de mis problemas", para "poner la mente a trabajar". Estudian para transformarse.

[14] "Retarde" es una expresión coloquial que significa "muy tarde".

FIGURAS DECISIVAS

Toda relación con el saber contiene pues una dimensión relacional, que es parte integrante de su dimensión identitaria. La sociología clásica suele tomar como variables la educación y el trabajo de los padres de los alumnos como referentes para buscar correlaciones con el fracaso escolar de los niños. Sin embargo, ha sido relevado cómo en muchas historias personales de alumnos de sectores populares, son otras las personas que han ocupado un lugar central en la relación con el saber de los sujetos y abonan a la construcción de una posición social subjetiva diferente de la posición social objetiva:

> El lugar objetivo, aquel que podemos describir desde el exterior, puede ser reivindicado, aceptado, rechazado, sentido como insoportable. Se puede de la misma forma ocupar otro (lugar) en su cabeza y comportarse en referencia a esta posición imaginaria. No basta entonces con conocer la posición social de los padres y de los hijos, es necesario también preguntarse sobre el sentido que confieren a esta posición (Charlot, 2008, p. 26).

Nuestros casos refieren contundentemente a diferentes figuras decisivas en sus historias personales. Algunas de ellas aparecen como positivas desde la perspectiva de nuestros sujetos: a través de las interacciones con ellas se abre una identificación dirigida a valorar el estudio, el saber, el mundo escolar. En cambio, otras –también desde la perspectiva de los entrevistados– aparecen como figuras de las que los sujetos debieron diferenciarse para valorar o asistir a la escuela. Algunas son personas cuyos encuentros apenas fortuitos han marcado al sujeto y que viven apasionadamente en sus discursos actuales por la atribución de sentidos que cada uno de ellos ha otorgado.

Los padres de Isabel aparecen en su discurso como figuras que no la han enviado a la escuela ni han tenido un proyecto de su formación para el futuro.[15] La falta de estímulo y exigencia es mencionada recurrentemente por ella, quien alude en forma permanente a mostrar cómo su rol de madre y abuela es opuesto al de sus padres. Nos habla de una monja que en su infancia le enseñaba, figura que le ha permitido investir el saber en oposición al modelo familiar. La monja de su infancia la colocó en otra posición: la de una niña que puede y debe aprender. También su patrona estimula actualmente que vaya a la escuela, le regala un libro, la incentiva a estudiar; incluso es portadora de un

[15] Ninguno de los sujetos entrevistados responsabiliza al Estado.

mensaje divino: a través de ella Dios le dice que estudie. Isabel ha construido su Yo epistémico gracias a las experiencias placenteras de aprendizaje con esas figuras que creyeron que debe y puede estudiar.

> **I:** *Ella* [la patrona] *me dijo que... que estaba bien lo que yo había empezado a hacer, irme a la escuela que... para hacer algo por mi vida, para no quedarme ahí estancada sin saber... quizás tengo la oportunidad de hacer algo ahora.*

> **I:** *Siempre que quiero abandonar* [la escuela de adultos] *Dios me manda a alguien que me dice "tenés que seguir".*

A Vicente de pequeño tampoco lo enviaron a la escuela. Según su propia explicación, a su padre no le importaba porque él mismo no sabía leer ni escribir. Este padre ha sido una figura decisiva de la que Vicente ha tratado de diferenciarse porque él sí ama trabajar, quiere crecer y tiene proyectos. Su primer patrón ha sido una figura decisiva positiva en la relación con el saber en tanto lo ha investido como alguien capaz e inteligente:

> **V:** *Siempre me dijo él: "Vos vas a emplumar y vas a volar".*

> **V:** *Lo que me decía mi patrón que, él mismo me decía: "Si vos supieras leer, serías un tipo, no sé, súper agotado"*[16] *me decía, porque me decía que era muy inteligente.*

También Alicia al estudiar se trata de oponer explícitamente a la imagen de su mamá, quien nunca la envió a la escuela. La oposición implica tanto tomar la decisión de ir a la escuela ella misma, como constituirse en una madre que sí estimula y envía a su propio hijo. Su padre y su madrastra a los 14 años le mostraron otra imagen de familia que valoraba el saber y el mundo escolar; sin embargo ella no aceptó el mandato paterno de estudiar por la vergüenza de ser ya demasiado grande para ir a la escuela. Años más tarde Alicia se reencuentra con escenas familiares placenteras en torno al estudio siendo empleada doméstica en una casa con niños pequeños que hacen las tareas escolares y que también la han marcado, nuevamente por ser testigo de la escolaridad ajena, nuevamente por la vergüenza de no saber. Otras figuras decisivas actuales son

[16] Vicente utiliza "agotado" para referirse a muy exigido o excesivamente ocupado.

su marido –que igual que su padre quiere que ella estudie– y su hijo mayor que cursa primer grado y es el destinatario principal explícito de su decisión de ir a la escuela.

> **A:** *Siempre te lo digo, que por él estoy estudiando, que no quiero que pase eso que yo no lo pueda ayudar, no...*

Julia (47 años) no hace referencia a personas que hayan sido figuras decisivas para su vínculo con el saber en general o con la matemática en particular, sino que refiere a grupos o instituciones. La primera es la familia de origen que organizaba turnos anuales rotativos para enviar a sus hijos a la escuela por las exigencias laborales. Otra figura decisiva para la relación con el saber de Julia es su iglesia en la que fue ayudante de tesorería. Allí no solo ha aprendido nuevos conceptos matemáticos y tenido experiencias gratificantes de responsabilidad y saber, sino que también ha experimentado satisfactorios roles de aprendiz y de enseñante.

> **J:** *El pastor me dijo "Mirá, vos tenés que ser secretaria de tesorería". Entonces bueno, agarré la secretaría. Eso me ayudó mucho.* [...] *Ahí usaba la matemática, también eran tantos los... porcentajes, sesenta por ciento, veinte por ciento, hay que hacer planillas, hay que enviar, una parte se va a la misión, otra a la mundial, otra a la... en tres partes tenía que dividir la plata que entraba a la iglesia, que se recaudaba.*

En estos adultos, que no han ido casi a la escuela de niños, su valoración del saber y del mundo escolar ha sido construida de la mano de unas figuras y en oposición a otras, pero sin duda fueron ellos mismos quienes les otorgaron el poder de ser decisivas.

LA IMAGEN "MATEMÁTICA" DE SÍ MISMOS

¿Cómo se perciben a sí mismos como usuarios, productores o aprendices de matemática? Una cuestión que sobresale en varios casos es la alta autoestima, un cierto orgullo de haber podido aprender y usar sus conocimientos para resolver problemas.

Isabel está orgullosa de su éxito para resolver problemas de varios pasos en situaciones de compra y venta. Vicente también lo está de lo que aprendió trabajando, y de su éxito en resolver cálculos y problemas en la escuela. Claudio también nos cuenta que en el campo sabía matemática, se considera rápido para los cálculos y dice de sí mismo que anda "demasiado bien" para las matemáticas. Explica que, como no tenía estudios, tuvo que "defenderse por dentro" y "usar el bocho".[17] Julia también está orgullosa de que la hayan nombrado secretaria de tesorería de su comunidad religiosa, cargo en el que debía hacer planillas y sacar porcentajes sin usar la calculadora.

Alicia, en cambio, no está orgullosa de sus conocimientos matemáticos que considera escasos. A pesar de que prima en su discurso esta sensación de impotencia y vergüenza reconoce –casi sorprendida de sus logros– que ha podido resolver exitosamente tanto situaciones de compra y venta en supermercados como de atención en un negocio cobrando y dando vueltos.

Todos coinciden en que la matemática les gusta y evocan numerosas experiencias en las que sus conocimientos les permitieron resolver problemas (relacionados con la compra y venta, el manejo del dinero, el cálculo de medidas de longitud, entre otros). Aparentemente la satisfacción personal de los propios logros y de los conocimientos disponibles parecería estar ligada tanto a las experiencias positivas de resolución de problemas, como al modo en el que han sido aprendidos con esfuerzo y dedicación personal. Como señala Claudio:

> **C:** [...] *Ahora, por como estoy yo con la matemática me defiendo un montón, de mi manera, como estoy yo así, en el trabajo que tengo y esas cosas.*

Quizás sea Vicente quien comunica más explícitamente su orgullo por la propia producción personal. Frente a un problema que involucraba multiplicar por 10 utiliza un método de resolución original (sumar 5 veces y luego mentalmente calcular el doble) y se produce el siguiente diálogo:

> **E:** *Estas cuentas, ¿se acuerda cómo las aprendió, quién se las enseñó?*
> **V:** *No, no... eso me lo hice yo. Esa es mi letra. Esta es mi enseñanza.*

Este orgullo no implica falta de reconocimiento de lo que no saben: explican con detalle –en relación con la numeración y el cálculo– los errores que producen, las dudas que tienen, los conocimientos con los que no están cómodos, lo que quieren aprender (por ejemplo, dicen que no saben la cuenta de dividir,

[17] *Bocho* es un término del lunfardo que significa "cabeza"; "usar el bocho" implica pensar, esforzarse.

que no conocen el símbolo de la multiplicación, que no saben las tablas o que se confunden al leer y escribir números con varias cifras).

Varios mencionan "temores matemáticos". Isabel, Vicente y Alicia le tienen miedo a los números grandes con muchos ceros porque son conscientes de sus errores, Vicente tiene miedo de confundirse en los presupuestos de su trabajo; Claudio tiene temor de equivocarse en los cálculos en la escuela (y de que las maestras se enojen). Tanto Vicente como Claudio temen no poder resolver problemas por falta de lectura autónoma. Alicia en su vida cotidiana también teme equivocarse en los cálculos al trabajar con su marido o al ayudar a su hijo con la escuela.

> **C:** *Cuando yo estudiaba en el Chaco las maestras a veces se enojaban porque no salían bien las cosas y... y bueno sigo con ese temor de que por ahí se... si está mal, yo sé que me van a decir: "No, está mal" nada más, pero yo tengo miedo... ese miedo tengo de que no quiero que estén mal las cosas. O sea, siempre que errás, o vamos a tener un error, pero yo no quiero ese error de errarlo, o no sé... por eso siempre trato si está bien, y bueno si no está bien, trataré de pensarlo.*

Solamente Julia expresa una respuesta negativa frente a la pregunta de si algo le da temor en matemáticas, seguramente gracias a sus reconfortantes experiencias comunitarias de aprendizaje y enseñanza.

EL ORIGEN DE SUS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

Nos hemos interesado en indagar la perspectiva subjetiva respecto del origen de sus propios conocimientos matemáticos.

Isabel considera que no usa actualmente la matemática en su trabajo, y que tampoco ha aprendido matemática en él; afirma que no ha aprendido nada de matemática cuando vivía en la calle. Reconoce aprendizajes solamente cuando puede identificar esfuerzo, asimetría entre enseñante y alumno, constancia en la asistencia y conciencia del objeto de estudio. Muchos de los conocimientos matemáticos de Isabel han sido aprendidos en situaciones informales, cotidianas; sin embargo, solamente identifica las tablas que le enseñó la monja, la división que le enseñó la profesora de corte y confección, y la multiplicación que está en el libro que le regalaron. Hay una desvalorización de sus aprendizajes matemáticos informales y una sobrevaloración de recursos aprendidos en instancias sistemáticas y explícitas.

A diferencia de Isabel, Claudio y Vicente valoran sus propios aprendizajes matemáticos del mundo del trabajo. Vicente considera que elaboró conocimientos matemáticos para poder calcular las hiladas, o cuántas tejas o ladrillos a partir de saber cuántos se precisan por metro cuadrado. Claudio considera que aprendió a hacer diversos tipos de cálculos en el campo, necesarios para averiguar, por ejemplo, la cantidad de toneladas de una recolección. Ambos consideran que estos conocimientos los han aprendido por sus propios medios, sin enseñanza sistemática.

V: *Lo fui aprendiendo así de vista o por escuchar.*

C: *Cuando laburaba a veces necesitaba sacar las cuentas y esas cosas, porque cuando laburaba en el campo tenía que sacar las cuentas, cuántas toneladas íbamos haciendo y todo eso.*

E: *¿Quién te enseñó a calcular eso de un metro cuadrado y después hacer esto que me dijiste a mí?* [refiriéndose a sus estrategias para averiguar el material necesario para revocar una pared].

C: *Y bueno, eso se aprende a la medida de, de la época, qué sé yo, de tanto trabajo y... si empecé porque, en el Chaco laburaba así, y bueno y entraba así, y a mí ponele me pagaban por hora e iba multiplicando así, o sumaba hora, hora... o por ahí, a mí me decían: "Bueno, tenés que hacer esta lonja de un metro" y bueno, yo iba sumando ese metro, iba midiendo ese metro, todo así.*

E: *¿Y alguien te enseñó, te ayudó, o lo aprendiste solo?*

C: *¡Nooo! Tuve la sensación que eso lo aprendía mirando. Yo miraba a otra persona y, y bueno. Primero no sabía manejar metros yo, y después, bueno, trabajé con un albañil y bueno, y yo nunca le dije a él: "Enseñame cómo se mide", ni eso. Yo lo miraba y lo observaba y lo observaba.* [Como imitando al albañil]. *"Vos mirame –dice–, yo no te tengo que enseñar, vos mirame y vas a aprender". Yo lo miraba y lo miraba, y yo decía: "Este... bueno, si él dice algo, él es mayor maestro en obras el hombre ese" y bueno, él me decía "Vos mirame, mirame nomás", y yo así aprendí. Mirando a las personas cómo trabajan.*

Claudio identifica un objeto de enseñanza sistemática escolar: el algoritmo de la suma que él denomina "la cuenta de cuatro" (refiriéndose a las cuatro cifras de una suma de bidígitos). Alicia reconoce haber aprendido matemática cuando cuidaba a los niños mientras ellos hacían sus tareas escolares y le enseñaban. También menciona las interacciones con su marido que –a propósito de situaciones de compra y venta– le enseña números y cálculos. Julia también identifica una gran variedad de aprendizajes realizados en la tesorería de la iglesia: sumas, restas, vueltos, porcentajes. A diferencia de Claudio y Vicente, ella evoca escenas de enseñanza y aprendizaje: le enseñó su antecesor y ella enseñó a su sucesor. Esto implica la presencia de varios elementos: una sistematización, asimetría en los roles, explicitación de un objeto y de recursos que son comunicados.

Ninguno de ellos identifica el origen de sus variados y complejos conocimientos numéricos ni de cálculo mental de sumas y restas relevados en este estudio. Estos conocimientos no aparecen mencionados como aprendizajes, ni se explicitan las condiciones e interacciones que participaron en su génesis. Los tratan como recursos naturales a pesar de que constituyen contenidos que se enseñan en la escuela a lo largo de varios años.

EL SENTIDO DE APRENDER MATEMÁTICAS

¿Cuáles han sido los sentidos que ha tenido para ellos aprender matemáticas y cuáles son los sentidos actuales?

Isabel nos relata que sus primeros aprendizajes matemáticos (las tablas de multiplicar) han sido aprendidos para obtener una muñeca prometida por una monja, pero en términos más amplios quería ser una niña como las otras que sí iban a la escuela. El curso de corte y confección le permitió, como las tablas de la infancia, proyectar un futuro. Sin embargo, hemos visto que sus actuales aprendizajes matemáticos tienen el sentido del placer en sí mismo que le produce aprender y estudiar

Vicente y Claudio, en cambio, han aprendido matemáticas trabajando y también quieren aprenderla para sus actuales ámbitos laborales. En el caso de Vicente para crecer en su trabajo en albañilería con mayor independencia; en el caso de Claudio para obtener nuevos trabajos. El mundo laboral ha sido la génesis y también constituye actualmente el sentido de sus aprendizajes matemáticos.

Para Julia las matemáticas han tenido un peso social. Fueron un otorgamiento de responsabilidad, sus matemáticas han sido comunitarias, sociales, el sentido de sus aprendizajes es moral y religioso. Saber matemáticas le permitía entregar lo que correspondía y que no hubiera diferencias a su favor, a la vez que ayudar a su comunidad. Hoy, en cambio, las matemáticas de Julia son un medio de salvación espiritual, de estar bien, de estar ocupada, de tener proyectos.

Alicia ha aprendido matemáticas en la escuela o en contextos familiares, y quiere seguir aprendiéndolas para ese fin. Son un medio de constituirse en una buena madre y en una buena esposa que ayuda a los miembros de su familia.

Varios expresan que quieren aprender en la escuela "todo" de matemática.

E: *¿Y hay algo que te gustaría aprender de matemática en la escuela?*
I: *Todo.*

E: *Y de matemática, ¿hay algo que sepa que quiere aprender?*
V: *Y, quiero aprender todo, lo máximo, lo máximo.*

C: *Porque yo, vos podes saber un poco pero no todo de adónde termina la matemática, ¿no? Este recién es el comienzo. Todavía nos espera un camino largo de matemática.*

Para Alicia es "todo lo que le podrían enseñar a su hijo en la escuela".

A: *O sea, quisiera aprender lo que ellos dan* [en la escuela de su hijo], *¿no?, para poder ayudarlo.*

También aparecen deseos más puntuales:

J: *Yo quisiera aprender, por decir que escucho hablar del álgebra, ¿qué será? No entiendo, pero solo me suena el nombre álgebra. Escuché hablar también a mi hija* [...] *me dice que estaban aprendiendo los... no sé qué... que se llama eso... nombres que lo llevan a algunos, potenciales, cada cual tiene su nombre, con un abecedario, con un número que acompaña arriba. No sé qué es... No sé si eso es álgebra o qué es eso, o si es quebrados.*

A pesar de las diferencias entre los casos, advertimos una amplia disposición a aprender aquello que la escuela tenga para enseñarles. Hay una alta valoración de la institución escolar y de lo que en ella se enseña. Los sujetos entrevistados no realizan una distinción entre lo útil o necesario y lo que no lo es, distinción tan presente en el discurso de la educación de jóvenes y adultos. Parte de lo que se viene a buscar a la escuela parecería ser aquello que no se conoce aún.

> **I:** *Yo a veces digo de que mi mente está como quieta, tiene que activarse, viste, mientras vos leés, mientras vos escribís, estás yendo a la escuela, estás... así, eh, tu mente se... se está activando para poder estudiar.*

> **J:** *No sé, no entiendo, pero la cosa es que eso quisiera aprender más, no estar todo oculto detrás mío.*

PALABRAS FINALES

En el estudio mencionado hemos indagado los conocimientos matemáticos de los alumnos adultos poniéndolos en diálogo con sus relaciones con el saber. Nuestra intención era conocer mejor al sujeto destinatario de posibles y futuras producciones didácticas. Los adultos de nuestra investigación construyen tanto conocimientos matemáticos (en interacción con los problemas que enfrentan) como significados personales a las porciones de sus matemáticas (en interacción con sus historias de vida).

Para los adultos que sufrieron en sus vidas limitaciones diversas que incluyen la ausencia de estudio escolar de matemática, aprender matemática no les significa apenas dotarse de instrumentos útiles, sino que interpela cuestiones identitarias: cambian sus mundos, cambian sus relaciones con los otros, se transforman a sí mismos. En este punto de construcción de un sujeto epistémico a partir de un sujeto singular, social, temporal, se encuentran las preocupaciones didácticas y las teorizaciones sobre la relación con el saber.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, A. (2003), "Cálculo escrito y pérdida de significación", *Decisio*, primavera, pp. 22-26.

Barré de Miniac, Ch. (2000), *Le rapport à l'écriture. Aspects théoriques et didactiques*, Villeneuve d'Ascq, Presses universitaires du Septentrion.

Beillerot, J., A. Bouillet, C. Blanchard-Laville y N. Mosconi (1989), *Savoir et rapport au savoir. Élaborations théoriques et cliniques,* París, Éditions Universitaires.
Beillerot, J., C. Blanchard-Laville y N. Mosconi (1996), *Pour une clinique du rapport au savoir*, París, L'Harmattan.
Bourdieu, P. y J-C. Passeron (1970), *La reproduction*, París, Éditions de Minuit.
Broitman, C. (2012), "Adultos que inician la escolaridad: sus conocimientos aritméticos y la relación que establecen con el saber y con las matemáticas", tesis de doctorado, Universidad Nacional de La Plata.
——— (2013), "Conocimientos sobre el valor posicional de adultos que inician la escuela primaria", en C. Broitman (comp.), *Matemáticas en la escuela primaria, I. Números naturales y decimales con niños y adultos*, Buenos Aires, Paidós.
Charlot, B. (2003), "La problématique du rapport au savoir", en S. Maury y M. Caillot, *Rapport au savoir et didactiques*, París, Fabert.
——— (2007), *La relación con el saber. Elementos para una teoría*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.
——— (2008), *La relación con el saber. Formación de maestros y profesores, educación y globalización*, Montevideo, Trilce.
——— (2013), *Da relação com o saber às práticas educativas*, São Paulo, Cortez.
Chevallard, Y. (1989), *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*, Aix-Marseille, IREM.
Delprato, M.F. (2002), "Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática", tesis de maestría en Ciencias con especialidad en Investigaciones Educativas, México, Cinvestav.
Giordan, A. (1977), "Pour une éducation scientifique: changer le rapport de l'élève au savoir", *Raison présente*, núm. 41, pp. 33-49.
——— (1978), *Quelle éducation scientifique pour quelle société?*, París, PUF.
Reuter, Y. (ed.) (2010), *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*, Bruselas, De Boeck.
Silva, Veleida Anahí da (2009), *Por que e para que aprender a matemática? A relação com a matemática dos alunos de séries iniciais,* São Paulo, Cortez.

DATOS DE LOS AUTORES

Claudia Broitman
Profesora de Didáctica de Matemática del Departamento de Ciencias de la Educación
Profesora de la maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad Nacional de La Plata, Argentina
claubroi@gmail.com

Bernard Charlot
Profesor Catedrático Emérito de Ciencias de la Educación de la Universidad de París 8, Francia
Profesor visitante de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática e Pós-Graduação em Educação de la Universidad Federal de Sergipe, Brasil
bernard.charlot@terra.com.br

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Construcciones mentales para el aprendizaje del concepto de probabilidad: un estudio de caso

Claudia Vásquez Ortiz y Marcela Parraguez González

Resumen: El propósito de la investigación que se reporta en este artículo es indagar mediante la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) en las construcciones mentales que estudiantes universitarios de primer año –dispuestos en un estudio de caso– muestran en la construcción del concepto de probabilidad. La estructura general del estudio se fundamenta en el ciclo metodológico que nos proporciona la misma teoría APOE, diseñando una descomposición genética a partir de un estudio histórico-epistemológico del concepto, la cual se pone a prueba a través de un cuestionario aplicado al caso. Los resultados obtenidos indican que algunos de los estudiantes que han respondido al cuestionario, alcanzan la construcción objeto del concepto de probabilidad, lo que evidencia la validez de la descomposición genética propuesta como modelo de construcción del concepto en cuestión.

Palabras clave: teoría APOE, construcciones mentales, aprendizaje, descomposición genética, probabilidad.

Mental constructions for learning probability concept: A case study

Abstract: The purpose of the research in to investigate, using APOS (Actions, Processes, Objects and Schemes) theory, mental constructions of college freshman students–proposed as a case study-show on the construction of the concept of probability. The overall structure of the study is based on the methodological cycle provide by same theory apos, designing a genetic decomposition from a historical-epistemological of the concept, study which is tested through a questionnaire applied to the case. The results indicate that some of the students, who responded to the questionnaire, reach to the construction of the concept of

Fecha de recepción: 10 de julio de 2013; fecha de aceptación: 17 de octubre de 2014.

probability, which proves the validity of the genetic decomposition construction proposed as a model of the concept in question.

Keywords: APOS theory, mental construction, learning, genetic decomposition, probability.

INTRODUCCIÓN

Dados los cambios en las últimas décadas respecto al tratamiento de la probabilidad en los distintos niveles educativos, es necesario disponer de investigaciones que den cuenta de cómo los estudiantes aprenden determinados conceptos vinculados al estudio de esta. Más específicamente, en relación con los aspectos cognitivos vinculados a la construcción del concepto de probabilidad de estudiantes universitarios de primer año, poniendo especial atención al significado atribuido ha dicho concepto más que a sus cálculos. Para ello, nos hemos situado en la teoría APOE como referente teórico y metodológico, pues nos brinda herramientas adecuadas para describir y analizar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para alcanzar el concepto de probabilidad; entendidas estas, en términos generales, como la organización de las ideas necesarias para intentar comprender algo. Así por medio del análisis de tales construcciones mentales lograremos contribuir a entender los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad que llevan a cabo estudiantes universitarios, a fin de contar con antecedentes y fundamentos teóricos que permitan, a futuro, formular propuestas de enseñanza para alcanzar una mejora en la comprensión del concepto de probabilidad.

ÁREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

El interés por el estudio de la comprensión de la noción de probabilidad y de elementos asociados a su aprendizaje no es una inquietud reciente. En efecto, ya en 1951 Piaget e Inhelder se interesaban por estudiar el desarrollo de las ideas de azar y probabilidad, centrándose en cómo los niños adquieren el concepto de probabilidad, según las etapas del desarrollo conceptual de Piaget. A partir de estos estudios se concluye que dicho concepto se transforma en un conjunto formal de ideas a partir de la etapa de las operaciones formales (12 años en adelante), ya que alrededor de esta edad adquieren la capacidad de utilizar procedimientos sistemáticos para determinar las posibles permutaciones, variaciones y combinaciones de un determinado conjunto de elementos. Lo que permite que posteriormente lleguen a establecer relaciones vinculadas a esquemas operacionales, mediante los cuales logran realizar una síntesis entre el azar y lo operacional, alcanzando así una comprensión adecuada del concepto. Esta visión piagetiana sobre la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad explica, en cierta medida, la tendencia, en las décadas pasadas, a enseñar probabilidad a partir de la adolescencia, abordada principalmente desde una visión clásica del concepto. Sin embargo, durante las últimas dos décadas esta tendencia ha sufrido variaciones, pues en numerosos países el estudio de la probabilidad se ha incorporado de manera continua y progresiva a lo largo del currículo escolar. Otorgándole un enfoque que no se centra solo en una visión clásica del concepto, sino que surge a partir de las ideas intuitivas de los alumnos, las que poco a poco se van complementando con diversos significados probabilísticos derivados de la experimentación y simulación de experimentos aleatorios que permiten dar respuesta a problemas de tipo probabilístico.

Es dado lo anterior, que para esta investigación nos hemos propuesto evidenciar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes universitarios muestran como estrategia cognitiva para alcanzar el concepto de probabilidad.

Investigaciones recientes con alumnos universitarios y con futuros profesores (Díaz, 2007; Contreras, 2011; Mohamed, 2012; Gómez, 2014) evidencian serias dificultades en la comprensión del concepto de probabilidad debido a su complejidad, que comúnmente se relaciona con lo incierto, y al lenguaje asociado a su estudio, que admite una variedad de términos en nuestro lenguaje ordinario. En particular, se observa la presencia de ciertos sesgos y heurísticas en la asignación de probabilidades, como el sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992). Esto no es de extrañar, pues ya en el ámbito científico, fueron numerosos los intentos realizados por diversos autores, como Pascal, Bernoulli, Bayes, Leibniz, Laplace, de Finetti, von Mises, Jaynes, Carnap, Popper y Keynes (Hacking, 1995), por definir rigurosamente el concepto de probabilidad. Concepto que, de acuerdo con lo planteado por Batanero (2005), presenta una variedad de enfoques (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático); los que predominan en las escuelas y en los libros de texto son: 1) frecuencial, el cual plantea que en una repetición indefinida de un experimento, bajo las mismas condiciones y sin que haya interacción entre las distintas repeticiones, la probabilidad de un suceso es el límite al que tiende la proporción de repeticiones en que el suceso tiene lugar; 2) clásico laplaciano, entendido como el cociente entre casos favorables y posibles, cuando los casos son igualmente posibles; 3) subjetivo, donde el individuo asigna a priori la probabilidad con base en su experiencia; y 4) axiomático, habitual hoy en día en los cursos de matemática estándar.

De ahí la complejidad del concepto, que nos devela que la probabilidad al igual que otros conceptos matemáticos no es inmutable. Es por ello, que los alumnos en su camino por alcanzar una adecuada comprensión de la probabilidad, deberán pasar por un proceso gradual enfrentándose "a lo largo de su aprendizaje con las mismas paradojas y situaciones contraintuitivas que aparecieron en el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades" (Batanero, 2008, p. 28).

Para entender de mejor manera cómo surge y se desarrolla nuestro objeto matemático, analizamos en una primera instancia su evolución histórico-epistemológica. Lo que nos permitió, dentro de otras cosas, esclarecer que contrario a lo que comúnmente se cree de que el concepto de probabilidad surge alrededor de 1660, atribuyéndose a Pascal los primeros trabajos en torno al concepto, quien se habría interesado en él a partir de problemas vinculados con los juegos de azar, el concepto de probabilidad o las primeras nociones vinculadas a él ya existían en tiempos muy remotos. Originándose desde las civilizaciones antiguas, a partir de los juegos de azar hasta adquirir poco a poco rigurosidad matemática, y formalizándose por primera vez con Pascal, para posteriormente llegar a conformar lo que hoy en día conocemos como la teoría de probabilidades (Hacking, 1995). A lo largo de este desarrollo histórico-epistemológico del concepto de probabilidad, se observa, además, una inevitable dualidad en su interpretación, la que tiene que ver tanto con grados de creencias como con frecuencias estables. Producto de lo anterior, consideramos que para la adecuada construcción del concepto de probabilidad, en los estudiantes universitarios de primer año, se debería poner atención en la presencia de construcciones mentales previas, que en cada aprendiz, conducen a la adquisición de esta dualidad frecuentista-bayesiana. La cual pensamos también debería estar presente en situaciones de aula que conduzcan al aprendiz a alcanzar el concepto de probabilidad a partir de sus concepciones mentales previas, que se construyen con base en el desarrollo de dichas situaciones, para así lograr adquirir dicho concepto plenamente.

Dada la diversidad de enfoques que muestra el análisis histórico-epistemológico, consideraremos al concepto de probabilidad como un modelo matemático satisfactorio que se puede utilizar para describir e interpretar la realidad de fenómenos aleatorios (Batanero, 2005). A partir de la definición axiomática de probabilidad, a saber: si hacemos un determinado experimento, que tiene asociado un espacio muestral finito Ω, definimos la probabilidad como una función que asocia a cada suceso A (es decir, un subconjunto de Ω) un número $P(A)$ llamado probabilidad de A, que cumple las siguientes propiedades:

1. La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o 0. Es decir, $P(A) \geq 0$. La probabilidad mide, en cierta manera, la facilidad con que ocurre un suceso A.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1. Es decir, $P(\Omega) = 1$. Así, la probabilidad siempre es mayor que 0 y menor que 1.
3. La probabilidad de la unión de un conjunto cualquiera de sucesos incompatibles (disjuntos) dos a dos es la suma de las probabilidades de los sucesos. Si tenemos, por ejemplo, los sucesos A, B y C, que son incompatibles dos a dos, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

MARCO TEÓRICO: LA TEORÍA APOE

La teoría APOE fue creada por Ed Dubinsky en 1991 a partir de la epistemología genética de Piaget, teniendo como concepto central el de *abstracción reflexiva*. Piaget llama así a la "abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos" (Beth y Piaget, 1980, p. 212). Ergo, la abstracción reflexiva se refiere a "las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que lo conducen a construir" (Piaget y García, 1982, p. 247), está es puramente interna al sujeto, y será entendida como "un mecanismo mental que sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre ellos" (Parraguez, 2009, p. 6). Sobre esta base, podemos describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, extendiéndolo al estudio de conocimientos matemáticos avanzados, especialmente los correspondientes a la educación superior.

El propósito de Dubinsky con esta teoría es "entender cómo las matemáticas se aprenden" (Dubinsky, 1991, p. 97) para elaborar un programa educativo que ayude a promover su aprendizaje. Por ello, esta teoría es principalmente un modelo que describe, a través de una descomposición genética del concepto en estudio, en nuestro caso el concepto de probabilidad, la manera en que los estudiantes aprenden o construyen mentalmente los conceptos matemáticos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes, para ayudar así, a otros estudiantes a realizar las construcciones mentales necesarias para generar dicho proceso de aprendizaje. En otras palabras, "una descomposición genética... es una primera aproximación para modelar el aprendizaje del concepto matemático en cuestión" (Trigueros y Oktaç, 2005, p. 163). La teoría APOE está centrada específicamente en las construcciones mentales que corresponden a *etapas* en el aprendizaje de conceptos matemáticos en los estudiantes (Piaget y García, 1983, 1989) y que se puntualizan por medio de las siguientes tres construcciones mentales: acciones, procesos y objetos.

Construcción mental acción: se refiere a las transformaciones sobre un objeto que son percibidas por el estudiante como externas (Asiala *et al.*, 1996) y son realizadas con base en indicaciones o estímulos externos. Según Dubinsky (1991) una acción es un estado de construcción limitado, sin embargo éstas marcan el principio de la comprensión de un concepto matemático, pudiendo verse reflejadas por medio de una o varias respuestas que llevan a la transformación de uno o varios objetos.

Construcción mental proceso: cuando un estudiante realiza una acción de manera repetida y puede reflexionar sobre ella, puede llegar a *interiorizarla* en un proceso; es decir, realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo (Dubinsky, 1996). Un estudiante mostrará una concepción proceso de un determinado concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, realizando transformaciones pero sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él.

Construcción mental objeto: cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso y piensa en él como un todo, entonces ha *encapsulado* tal proceso como un objeto cognitivo. No obstante, "en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario *desencapsular* para regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo" (Dubisnky, 1996, p. 97).

El paso por estas tres etapas no es necesariamente lineal. De hecho, un estudiante puede estar en una etapa para ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros. El mecanismo principal que permite que evolucione el conocimiento de un estado de construcción a otro, es la *abstracción reflexiva*, herramienta que permite que el estudiante reflexione sobre sus acciones en un objeto, de modo tal que organice sus conocimientos estableciendo nuevas construcciones mentales, que le permitan el paso de una etapa de conocimiento a otra más elevada. Llegando así a construir el conocimiento matemático, como producto de mecanismos mentales sucesivos (interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación), mediante los cuales logra constituir una colección de acciones, procesos y objetos que llevan a conformar el correspondiente esquema asociado a un objeto matemático.

La noción de *construcción mental esquema* también proviene de las ideas de Piaget; pero tiene una connotación distinta dentro de la teoría APOE, pues con ella se busca explicar cómo se desarrollan conceptos matemáticos por medio de los procesos de enseñanza. Un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, en una estructura coherente, y que pueden ser evocados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Parraguez y Oktaç, 2012). A la integración de una entidad matemática nueva a un esquema, se le llama asimilación.

De este modo, se desarrolla la construcción del conocimiento matemático por medio de las acciones, procesos, objetos y esquemas (figura 1).

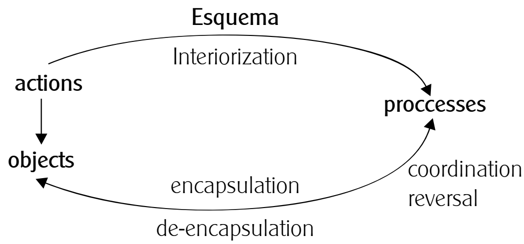


Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon *et al*., 2014, p. 18)

Como se muestra en la figura 1, las acciones construidas por respuestas repetitivas a un estímulo son interiorizadas por el estudiante, transformándolas en procesos, que finalmente se encapsularán en un objeto. Así, tal colección de acciones, procesos y objetos se organiza en un esquema asociado a un objeto matemático, estableciendo nuevas relaciones entre sus componentes.

Podemos señalar que el uso de la teoría APOE para explicar la construcción de los conceptos matemáticos es relativamente nueva y ha sido utilizada con éxito en investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos en Cálculo, Análisis, Álgebra Lineal, Álgebra Abstracta, Matemática Discreta, Estadística y Lógica (Arnon *et al*., 2014). Sin embargo, hasta hoy no hay investigaciones desde esta perspectiva teórica en el tema probabilidad. No obstante, como veremos a continuación, la teoría APOE a partir de su descomposición genética, nos proveerá de un modelo que describe en detalle el estado de las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda el concepto de probabilidad.

METODOLOGÍA

La estructura general del estudio se basa en el paradigma de la teoría APOE, la cual nos provee de un ciclo metodológico propio de investigación, que consta de tres etapas: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos. La aplicación de este ciclo de investigación (figura 2) nos permitió obtener una visión en detalle de cómo los estudiantes universitarios de primer año, de nuestro grupo de estudio, construyen el concepto de probabilidad, es decir, de sus construcciones y mecanismos mentales vinculados a las concepciones de acciones, procesos y objetos.

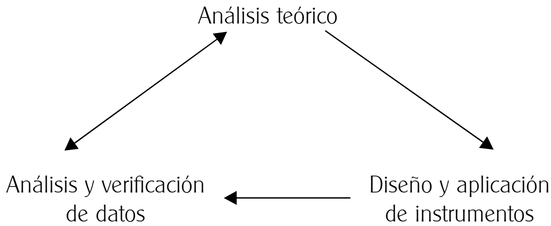


Figura 2. Ciclo metodológico de investigación de la teoría APOE (Asiala *et al.*, 1996)

En concordancia con el ciclo metodológico propuesto, lo primero fue realizar un análisis teórico sobre el concepto de probabilidad, el cual consideró el análisis de libros de texto empleados en los cursos de introducción a la estadística y probabilidad, y la experiencia de aula de las investigadoras enseñando el tema, entre otros aspectos. Lo anterior, permitió levantar construcciones mentales (hipotéticas) necesarias para diseñar una descomposición genética (DG) del concepto de interés y describir en detalle los aspectos constructivos del concepto, para explicitar un modelo (Arnon *et al.*, 2014) factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales, que los estudiantes deben estructurar en su mente en relación con otros conceptos considerados relevantes; en nuestro caso, con los conceptos de suceso, experimento, espacio muestral discreto, métodos de conteo, axiomas de probabilidad, regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes. Así, a partir de la descomposición genética del concepto, fundamentamos el diseño y la construcción de un instrumento que permitió evidenciar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto de probabilidad.

Descomposición genética hipotética

La DG hipotética propuesta describe un posible camino que los estudiantes pueden seguir para construir nuestro concepto de interés, es decir, las construcciones y mecanismos mentales mediante los cuales los estudiantes pueden modelar una construcción del concepto de probabilidad. Llamamos a esta DG "hipotética" pues por medio de la propia investigación y de la aplicación del ciclo metodológico de la teoría APOE, esta fue refinada, obteniendo así una DG que permitió dar cuenta de mejor manera cómo los estudiantes construyen el concepto de probabilidad. Con este propósito en mente, nos planteamos los siguientes interrogantes, basándonos en las preguntas que Asiala *et al.* (1996) señalan como fundamentales para guiar el diseño de una DG: 1) ¿qué construcciones mentales previas son necesarias o suficientes para una adecuada construcción del concepto de probabilidad?; 2) ¿cuáles son las construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de probabilidad?

Estas preguntas ayudaron, junto al análisis teórico, a orientar el diseño de la DG para finalmente, cumplir con los objetivos de "determinar las construcciones y mecanismos mentales que puede poner en juego un estudiante universitario como estrategia cognitiva para construir el concepto de probabilidad". En el lenguaje de la teoría APOE: "diseñar y evidenciar una DG de dicho concepto", para así "diseñar y aportar evidencia a favor de una posible DG del concepto de probabilidad, esto es, las correspondientes construcciones mentales (acciones, procesos, objetos) de los conceptos y resultados, que un aprendiz universitario utiliza para la construcción del concepto de probabilidad".

Con base en nuestra experiencia de aula, consideramos necesario para la construcción del concepto de probabilidad que los estudiantes universitarios de primer año, puedan realizar acciones en una conceptualización objeto de la teoría de conjuntos, es decir, que muestren, a través de argumentos observables, nociones y conceptos elementales de la teoría de conjuntos. Esto porque el concepto de probabilidad será construido a partir de la concepción objeto de suceso, entendida ésta como un conjunto de resultados posibles, subconjunto del espacio muestral, que a su vez es entendido como el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Tales sucesos pueden combinarse para formar sucesos nuevos utilizando las operaciones de la teoría de conjuntos. De ahí la importancia de contar con una conceptualización objeto de la teoría de conjuntos, ya que los conceptos de espacio muestral y suceso la involucran forzosamente.

A través de la DG hipotética propuesta (figura 3) se describe un modelo para

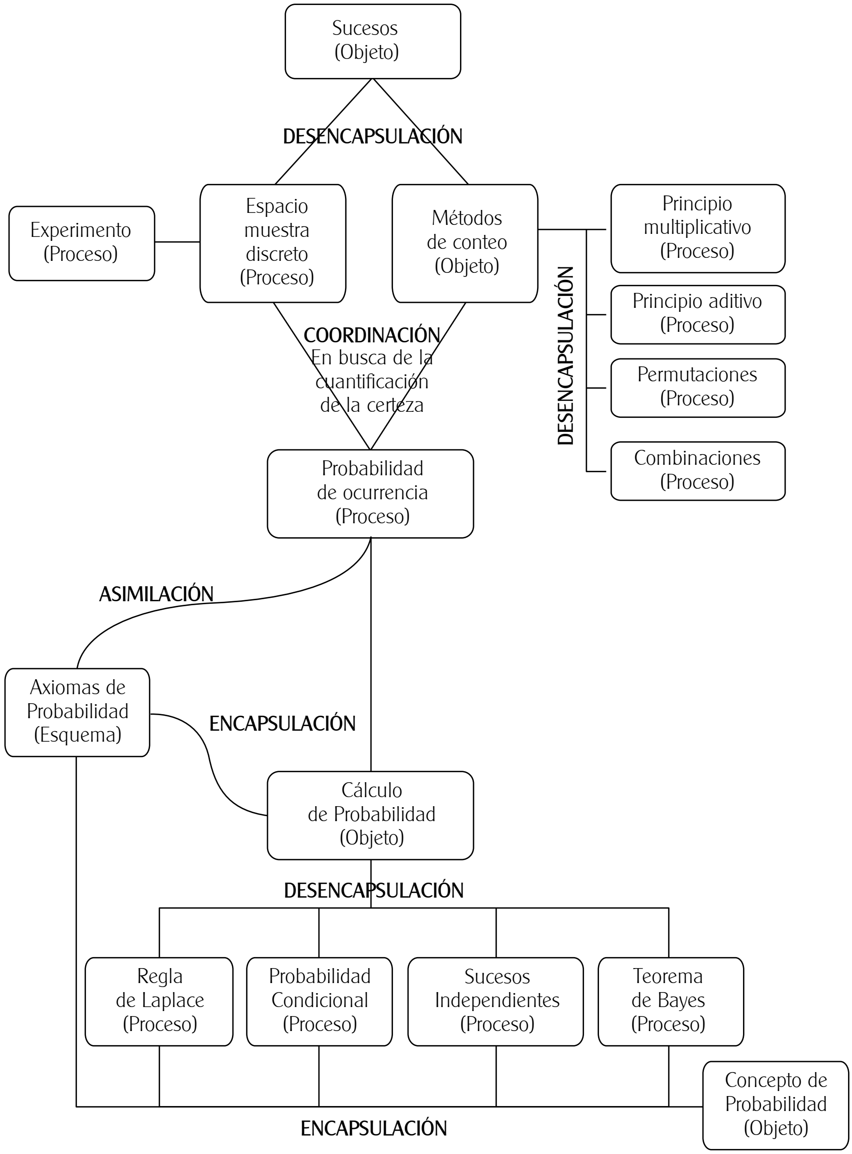


Figura 3. DG hipotética del concepto de probabilidad

construir el concepto de probabilidad, a partir de cuatro construcciones fundamentales: objeto de *suceso,* proceso de probabilidad de ocurrencia, esquema de axiomas de probabilidad y objeto de cálculo de probabilidad.

Según esta DG hipotética, el estudiante universitario de primer año comenzaría por movilizar sus construcciones mentales vinculadas al objeto suceso, entendiéndolo como un conjunto de resultados posibles, lo cual llevará a que desencapsule dicho concepto, vinculándolo a concepciones procesos, como la de espacio muestral particular asociado a un cierto experimento o a la concepción objeto de los *métodos de conteo,* entendiéndolos como el número total de maneras en que un cierto suceso puede ocurrir, desencapsulándolo en los siguientes procesos, con el fin de usar propiedades numéricas: principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones y combinaciones.

Diremos que un estudiante muestra una concepción proceso de un espacio muestral asociado a un experimento, si es capaz de determinar ese espacio muestral dependiendo del interés del observador, y reconociendo que dicho espacio muestral no es único. Por ejemplo, *consideremos el experimento aleatorio hipotético de participar en un juego de lotería. Supongamos que hay un millón de números en esta lotería y un jugador participa con un boleto. ¿Cuál es un posible espacio muestral para este experimento?*

Si al jugador le interesa conocer la probabilidad que tiene de ganar en este juego, puede proponer como espacio muestral el conjunto $\Omega = \{\textit{ganar, perder}\}$, no obstante puede considerarse como espacio muestral a aquel conjunto que contiene a todos los posibles números ganadores: $\Omega = \{1{,}2{,}3...1.000.000\}$.

En el caso del concepto métodos de conteo, un estudiante mostrará una concepción objeto de dicho concepto si reconoce una situación en que no es posible enlistar y contar uno por uno todos los elementos de un espacio muestral o suceso. Por ejemplo: *¿Cuántos números telefónicos existen que tengan por lo menos un 7?* En este caso es casi imposible escribir todos los números uno a uno para contarlos, por lo que surge la necesidad de emplear métodos de conteo que ayuden a determinar la cardinalidad de un espacio muestral o suceso.

Producto de lo anterior, el estudiante desencapsulará el objeto métodos de conteo en procesos que le permitan usar sus propiedades numéricas: principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones y combinaciones. Específicamente diremos que el estudiante muestra una concepción proceso de los métodos de conteo, cuando se da cuenta que el total es $2 \times 3 \times 4$, mediante un proceso de ramificaciones sucesivas. Entonces, el proceso aquí, es un proceso combinatorio que emerge: el árbol de tres generaciones con fecundidades 2, 3 y 4. El estudiante es capaz de mirar este árbol como se mira un número y operar con ellos, concatenarlos (injertarlos), por ejemplo.

De acuerdo a las características de los problemas propuestos, diremos que el estudiante:

a) Muestra una concepción proceso del principio multiplicativo si reconoce y resuelve casos en que un cierto procedimiento A se puede hacer de m maneras y un procedimiento B se puede hacer de n maneras, entonces existen $m \times n$ formas de realizar A y a continuación realizar B.

b) Muestra una concepción proceso del principio aditivo si reconoce y resuelve casos en que si un cierto procedimiento A se puede hacer de m maneras y un procedimiento B se puede hacer de n maneras, y no es posible que ambos procedimientos A y B se realicen juntos, entonces el número de maneras como se puede hacer A o B es $m + n$.

c) Muestra una concepción proceso de permutación si reconoce y resuelve casos en que es necesario agrupar n objetos diferentes en algún orden específico (uno detrás de otro y por lo tanto sin repetición).

d) Muestra una concepción proceso de combinación si reconoce y resuelve casos en que es necesario tomar una selección de objetos a partir de una colección, sin contar el orden.

La concepción objeto de los métodos de conteo quedará de manifiesto cuando el estudiante la desencapsule en los procesos de: principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones y combinaciones, aplicándolos a la resolución de situaciones problemas.

Lo anterior, quedará en evidencia al resolver, por ejemplo problemas del tipo: *Nicolás y Fernando decidieron este semestre inscribir Tenis como curso deportivo con la idea de entrenar juntos, pero les acaban de avisar que los 90 alumnos aceptados serán distribuidos aleatoriamente en tres secciones de 30 alumnos cada una. ¿Cuál es la probabilidad que los dos queden en la misma sección y puedan entrenar juntos si es que ya fueron aceptados en el deportivo?*

Para resolver este problema el estudiante deberá reconocer la imposibilidad de contar uno a uno, por lo que deberá mostrar una concepción objeto de los métodos de conteo, desencapsulando una concepción proceso que le permita recurrir a la cardinalidad para distribuir 90 alumnos en tres secciones distintas de tamaño 30, además de recurrir a la cardinalidad de los casos favorables en la situación planteada.

Estos procesos pueden ser coordinados en una nueva concepción proceso, a través de la búsqueda de la cuantificación de la certeza de ocurrencia de un suceso. Por medio de la coordinación específica de los procesos mentales anteriores, llegaría a una concepción proceso de la *probabilidad de ocurrencia* asociada a un determinado suceso, con la cual se busca reflejar un grado de certeza cualitativo mediante el uso de una escala numérica. Este concepto juega un rol fundamental en la construcción del concepto de probabilidad, ya que a partir de él emergerán las construcciones mentales asociadas a la concepción objeto del concepto de probabilidad, tales como: la concepción esquema de los axiomas de probabilidad y la concepción objeto del cálculo de probabilidad.

Si el estudiante puede distinguir entre sucesos posibles, inciertos e imposibles y atribuirles un cierto grado de certeza, tiene una concepción proceso de la probabilidad de ocurrencia. Por ejemplo: *Andrea tiene una bolsa con 3 bolitas rojas, 3 azules y 3 verdes. ¿Cuántas bolitas habrá que extraer para creer que se obtendrá una de cada color?*

Este proceso será encapsulado dando lugar a un nuevo objeto: *cálculo de probabilidad,* el cual es obtenido por medio de la asimilación del esquema *axiomas de probabilidad,* que permiten la formalización de la probabilidad y de la encapsulación del objeto *probabilidad de ocurrencia.* Tales axiomas son válidos tanto para la interpretación frecuentista como bayesiana del concepto de probabilidad.

Bajo esta nueva concepción, el estudiante podrá verificar si tales axiomas se cumplen o no, además de trabajar con una concepción objeto del *cálculo de probabilidad,* la cual deberá desencapsular en los procesos de regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, según el requerimiento.

Finalmente, el estudiante muestra una concepción objeto del *cálculo de probabilidad* cuando ha podido encapsular los procesos anteriores de: regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, atribuyendo a cada uno, una determinada forma de proceder, además de asignar e interpretar su significado.

Construcción del instrumento

Una vez diseñada la DG hipotética fue necesario verificar su viabilidad como modelo de construcción del concepto de probabilidad. Para ello, diseñamos un cuestionario de respuesta abierta, compuesto por 14 preguntas (véase tabla en el anexo), que nos permitió identificar y profundizar en las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción del concepto de probabilidad, para posteriormente, contrastarlas con las propuestas en la DG.

Cabe señalar que algunas de las preguntas que conforman el instrumento fueron adaptadas de libros de texto (De Groot, 1988) y de algunas investigaciones vinculadas a la probabilidad (Carranza y Fuentealba, 2010; Batanero, 2005). Para cada una de las preguntas y problemas que forman parte de este cuestionario, se realizó un análisis a priori basado en el análisis teórico, el cual consideró una reflexión sobre las posibles respuestas que los estudiantes pueden otorgar, y de la forma en que éstas se vinculan con las construcciones mentales descritas en la DG hipotética. Con base en este análisis se verificó que el cuestionario aborda en su totalidad las construcciones y mecanismos mentales planteados en la DG hipotética, esto se puede visualizar en la tabla 1.

	Sucesos	Probabilidad de Ocurrencia	Axiomas de Probabilidad	Cálculo de Probabilidad	Concepto de Probabilidad
Acción	Pregunta: 7 y 10	Pregunta: 1, 2, 3, 6 y 7	Pregunta: 10 y 11	Pregunta: 7 y 8	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14
Proceso	Pregunta: 10 y 13	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5 y 6	Pregunta: 10 y 11	Pregunta: 8 y 9	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14
Objeto	Pregunta: 14	---	Pregunta: 10 y 11	Pregunta: 7, 8, 9, 12 y 13	Pregunta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14
Esquema	-	-	Preguntas: 10 y 11	-	-

Tabla 1. Construcciones mentales que se espera evidenciar con cada una de las preguntas del cuestionario

Además, para resguardar la validez de contenido del instrumento recurrimos al juicio de tres expertos en la enseñanza de la probabilidad, quienes analizaron aspectos relacionados con el grado de correspondencia de cada una de las preguntas planteadas en relación a las construcciones y mecanismos mentales que se pretende evidenciar, y a la formulación de la pregunta. Posteriormente, con el propósito de obtener información empírica acerca de las posibles limitaciones del cuestionario, realizamos una pequeña aplicación piloto a un grupo de 5 estudiantes, lo que nos permitió realizar algunas modificaciones a las preguntas que componen el cuestionario, además de obtener una validación en terreno del instrumento. En consecuencia, por medio de la aplicación del instrumento, fue posible describir y documentar las construcciones y mecanismos mentales evidenciados por los estudiantes en torno al concepto, detectando qué elementos no han sido considerados en la DG hipotética, o cuáles de las construcciones y mecanismos mentales dados allí se perciben, en estudiantes que parecen comprender el tema y otros que no lo hacen.

Aplicación del instrumento

Como esta investigación busca validar las construcciones y mecanismos mentales propuestos en la DG hipotética para la construcción del concepto de probabilidad en estudiantes universitarios de primer año, se invitó a participar voluntariamente a 12 estudiantes de licenciatura en Ciencia Estadística de una universidad chilena de la Quinta Región.

El criterio de selección de los estudiantes, obedece por un lado, a la accesibilidad de los investigadores y por otro lado, al hecho de que estudiantes voluntarios al momento de la aplicación del cuestionario se encontraban finalizando el curso de Introducción a la Estadística, en el cual han tratado los contenidos de: experimento, espacio muestral y sucesos, introducción a técnicas de conteo, operaciones con sucesos y leyes básicas de probabilidad, probabilidad condicional e independencia de sucesos, regla de Bayes y reglas generales de medidas de probabilidad. Además, partimos del supuesto de que estos alumnos cuentan con las construcciones referidas a elementos básicos de la teoría de conjuntos, dado que paralelamente al curso de Introducción a la estadística, se encuentran realizando un curso de Álgebra en el cual dan especial énfasis a los elementos básicos de la teoría de conjuntos, los cuales ya han sido abordados en su totalidad al momento de responder a nuestro cuestionario.

En lo que respecta al contexto en que se aplicó el cuestionario, podemos señalar que los estudiantes fueron invitados a responder el cuestionario de forma voluntaria, siendo el único requisito el encontrarse finalizando los cursos de Introducción a la estadística y de álgebra. El cuestionario fue administrado por las investigadoras, entregándose un cuestionario para cada estudiante, para el cual disponían de 90 minutos para responder. Al momento de aplicar el cuestionario, se les solicitó que respondieran con máximo detalle cada una de las distintas preguntas, y que no dejaran preguntas sin responder, indicando que en el caso que desconocieran cómo responder indicaran con claridad cuáles eran las dificultades o carencias de conocimientos que identificaban.

Análisis de los datos

El análisis de los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario se realizó con base en la DG hipotética diseñada para el concepto de probabilidad, detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones mentales dadas hipotéticamente no se perciben. Para ello consideramos a estudiantes que parecen comprender el concepto y otros que no lo hacen, y luego se discute si la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la DG. Solamente entonces, se puede llegar a la conclusión de que los datos validan esa construcción mental particular en la DG. Este procedimiento se realizó para todas las construcciones mentales específicas con las que cuenta la DG hipotética, con la finalidad de validar o refinar la DG propuesta.

En lo que sigue presentamos el análisis de nuestros resultados considerando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una, se muestran, a modo de ejemplo, extractos de respuestas de algunos de los estudiantes que evidencian dicha construcción y que fundamentan nuestras observaciones, permitiéndonos de este modo *determinar las construcciones y mecanismos mentales que puede poner en juego un estudiante universitario como estrategia cognitiva para construir el concepto de probabilidad.*

Construcción objeto de sucesos

Es importante señalar que de acuerdo a la DG hipotética, para que un estudiante muestre una concepción objeto de sucesos, debe desencapsular dicho objeto en el proceso de espacio muestral y el objeto de métodos de conteo, lo cual será evidenciado cuando pueda identificar y aplicar los métodos de conteo estableciendo relaciones entre éstos y el espacio muestral de un determinado suceso.

Esta concepción objeto de sucesos, de acuerdo con el análisis a priori para cada una de las preguntas del cuestionario, puede observarse mediante las estrategias de resolución dadas a la pregunta 14.

A partir del análisis de las respuestas y estrategias de resolución de los estudiantes, observamos que solo uno de los 12 estudiantes muestra una construcción objeto de suceso, al identificar la necesidad de aplicar y relacionar los métodos de conteo, tanto para la determinación del espacio muestral como de los casos favorables y totales, como se muestra en la respuesta del estudiante 10 (figura 4).

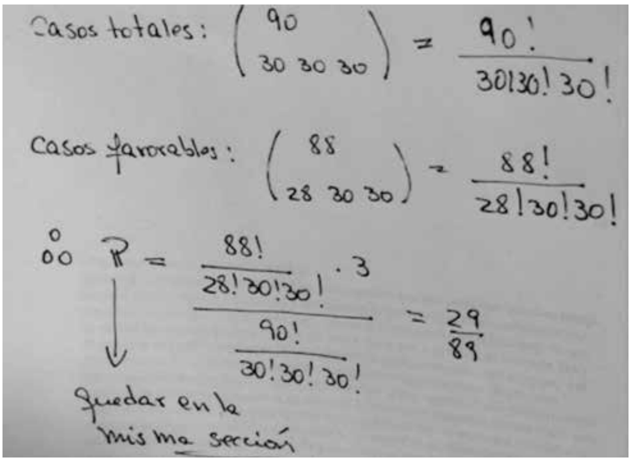


Figura 4. Respuesta a la pregunta 14 del estudiante 10

Mientras que la gran mayoría de los estudiantes no alcanza la construcción objeto de suceso, pues no logran aplicar y relacionar los métodos de conteo, para dar respuesta a la pregunta 14 del cuestionario. Un ejemplo de esto es la respuesta dada por el estudiante 1 que se muestra en la figura 5.

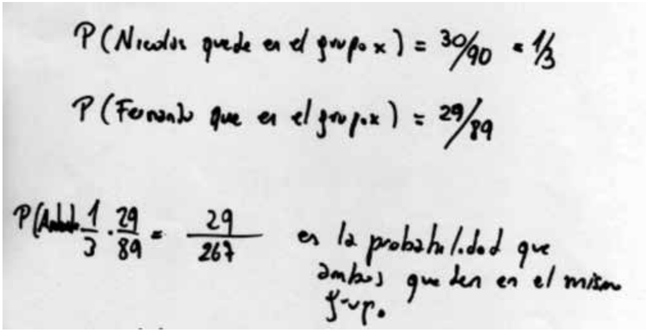


Figura 5. Respuesta a la pregunta 14 del estudiante 1

En esta respuesta (figura 5) el estudiante 1 identifica los sucesos vinculados a la situación; sin embargo, no reconoce la necesidad de aplicar los métodos de conteo.

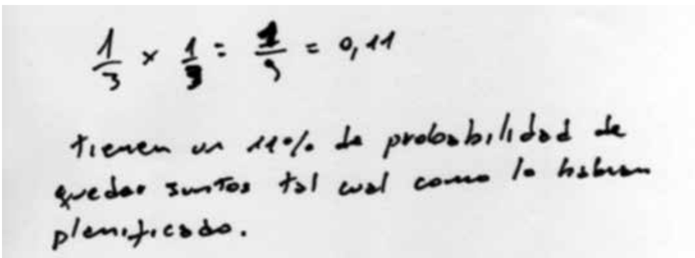


Figura 6. Respuesta a la pregunta 14 del estudiante 5

Para el estudiante 5 (figura 6) la probabilidad de que ambos amigos queden en la misma sección es de 1/3. Nuevamente no se reconoce la necesidad de aplicar métodos de conteo, tanto para la determinación de las maneras de distribuir 90 alumnos en tres secciones distintas de 30, ni para determinar los casos favorables correspondientes a las diferentes maneras de distribuir los restantes 88 en tres secciones.

La predominante ausencia de esta construcción objeto se debe a que éstos estudiantes carecen de la construcción objeto de los métodos de conteo. Sin embargo, al analizar las respuestas otorgadas a la pregunta 13 vemos que poseen una construcción proceso de sucesos, ya que identifican los sucesos vinculados a una determinada situación, reconociendo el espacio muestral sin la necesidad de contar uno a uno. Veamos algunas respuestas en que es posible identificar esta construcción.

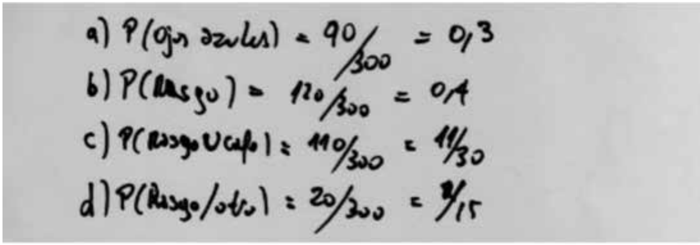


Figura 7. Respuesta a la pregunta 13 del estudiante 1.

La respuesta del estudiante 1 (figura 7) demuestra que evidencia una construcción proceso de sucesos, puesto que identifica los sucesos vinculados a una situación reconociendo el espacio muestral sin necesidad de contar uno a uno, sino solamente interpretando la información.

Este tipo de respuesta se observa en casi todos los estudiantes. Por ello, podemos concluir que este grupo evidencia en su mayoría una construcción proceso de sucesos, lo cual se encuentra distante de la construcción objeto que se planteaba en la DG hipotética, siendo la principal causa de la falta de esta construcción mental, la carencia por parte de estos estudiantes, de la construcción objeto de los métodos de conteo.

Construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia

De acuerdo a lo planteado en la DG hipotética, para que un estudiante muestre una construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia, debe coordinar el proceso de espacio muestral y el objeto métodos de conteo para cuantificar la certeza en un determinado suceso. Dicha construcción será evidenciada cuando el estudiante asigne una probabilidad de ocurrencia a un suceso, reflexionando sobre ella, es decir, asigne un significado a dicho valor. Se espera evidenciar dicha construcción en las estrategias de resolución planteadas para responder a las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6. A partir de las respuestas evidenciamos la presencia de la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia. Casi todos los estudiantes responden de la manera correcta y esperada, determinando y asignando una probabilidad de ocurrencia a un determinado suceso, en base a creencias y evidencias o estabilizaciones de frecuencias presentadas para cada pregunta.

En el caso de la pregunta 1, 8 de los 12 estudiantes asignan de manera correcta la probabilidad de ocurrencia solicitada, otorgando a este valor numérico un significado basado en la estabilización de la frecuencia de aparición en el lanzamiento de una moneda, sustentando sus respuestas en el hecho de que cada lanzamiento es independiente del otro. Ejemplos de esto son las respuestas de los estudiantes 12 (figura 8) y 3 (figura 9).

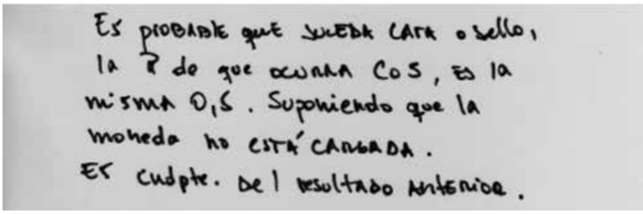
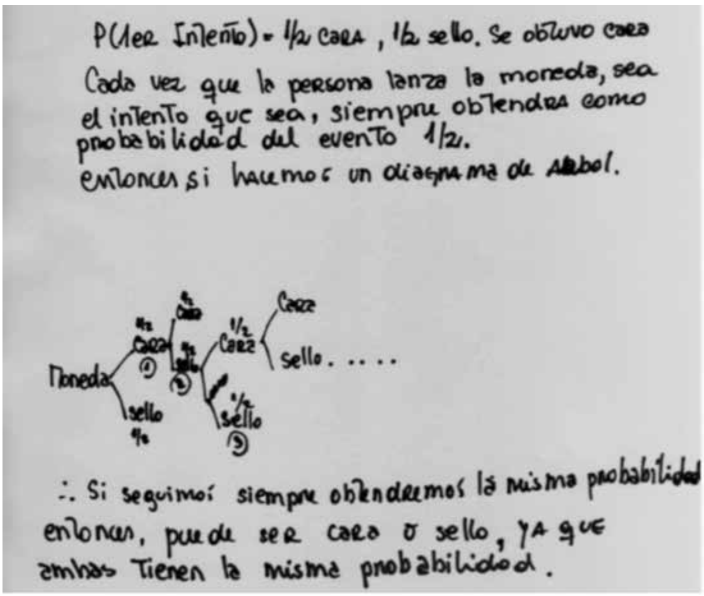

Es probable que suceda cara o sello,
la P de que ocurra C o S, es la
misma 0,5. Suponiendo que la
moneda no está cargada.
Es indpte. del resultado anterior.

Figura 8. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 12


P(1er Intento) = 1/2 cara, 1/2 sello. Se obtuvo cara
Cada vez que la persona lanza la moneda, sea
el intento que sea, siempre obtendremos como
probabilidad del evento 1/2.
entonces si hacemos un diagrama de árbol.

∴ Si seguimos siempre obtendremos la misma probabilidad
entonces, puede ser cara o sello, ya que
ambas tienen la misma probabilidad.

Figura 9. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 3

Además, a partir de estas respuestas y argumentaciones (figuras 8 y 9) podemos evidenciar la presencia de un enfoque frecuentista del concepto de probabilidad de ocurrencia en estos estudiantes.

Es importante aclarar que 4 de los 12 estudiantes respondieron erróneamente a la pregunta 1, puesto que descartaron información implícita en el enunciado, esto es, dejar de lado el supuesto de independencia entre un lanzamiento y otro. Por otro lado, en sus argumentos no muestran haber considerado que a mayor número de lanzamientos se debe dar una estabilización de las frecuencias, sino que por el contrario, dan evidencias de ciertos sesgos probabilísticos. Algunas de las respuestas y argumentaciones que evidencian esto, son las figuras 10 y 11:

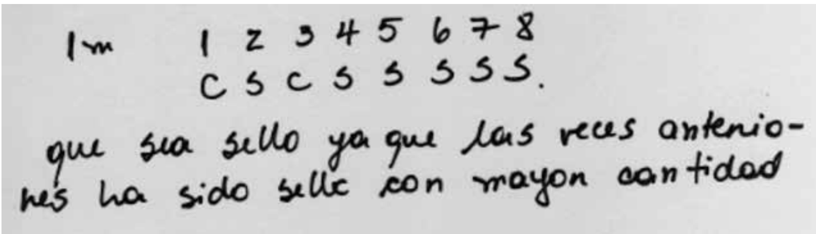

1m 1 2 3 4 5 6 7 8
C S C S S S S S.
que sea sello ya que las veces anterio-
res ha sido sello con mayor cantidad

Figura 10. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 9

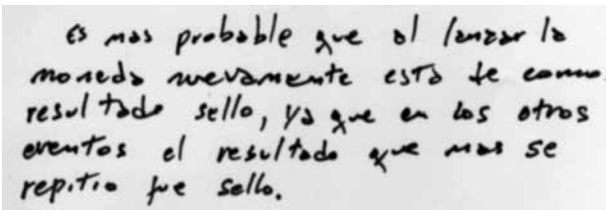

es mas probable que al lanzar la
moneda nuevamente esta de como
resultado sello, ya que en los otros
eventos el resultado que mas se
repitio fue sello.

Figura 11. Respuesta a la pregunta 1 del estudiante 5

Los estudiantes 9 y 5 consideran que en el noveno lanzamiento es más probable obtener como resultado "sello", puesto que dejan de lado en su estrategia de resolución la estabilización de la frecuencia de aparición.

En la pregunta 2, la situación es aún mejor, puesto que en esta pregunta 10 de los 12 estudiantes, dan argumentos en los que queda de manifiesto la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia, ya que además de coordinar el proceso de espacio muestral para la cuantificación de la certeza, reflexionan sobre ella asignándole un significado.

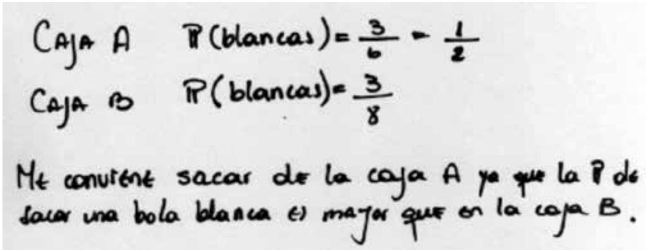


Figura 12. Respuesta a la pregunta 2 del estudiante 2

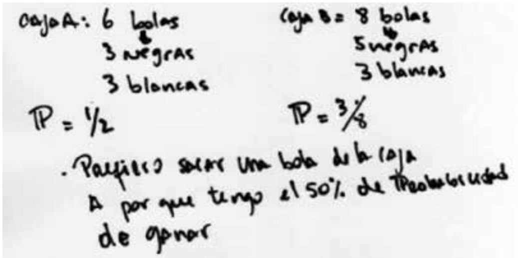


Figura 13. Respuesta a la pregunta 2 del estudiante 7

Para los estudiantes 2 (figura 12) y 7 (figura 13), la decisión de qué caja sacar una bola se basa en la evidencia, que los conduce a pensar que es más probable sacar una bola blanca de la caja A puesto que en ésta hay igual número de bolas blancas y negras, a diferencia de la caja B en la que hay más bolas negras que blancas. Este tipo de argumentos muestra que los estudiantes cuentan con una construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia. No obstante, el estudiante 4 fue uno de los 2 estudiantes que respondió erróneamente esta pregunta (figura 14).

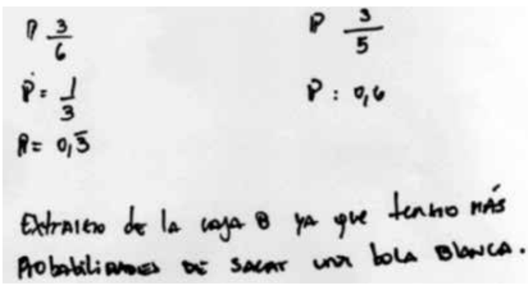
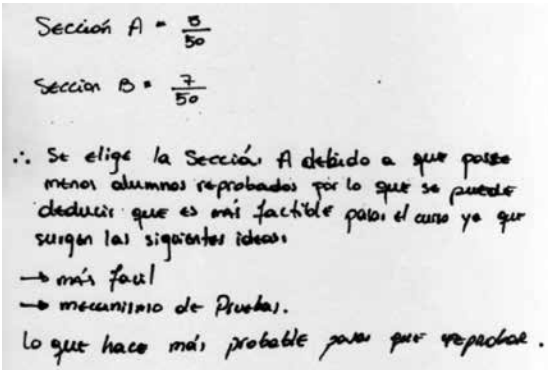


Figura 14. Respuesta a la pregunta 2 del estudiante 4

Sin embargo, los estudiantes del caso de estudio muestran la construcción proceso de probabilidad de ocurrencia, puesto que el tipo de error que cometieron en sus respuestas se debe a que aplican una relación no adecuada que se basa en determinar casos favorables/casos desfavorables.

En el caso de la pregunta 3, todos los estudiantes respondieron correctamente, mostrando la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia; además, sus respuestas y argumentos se basaron en la interpretación de la información que tenían (figura 15), observándose una interpretación bayesiana en sus argumentos. A continuación, algunas de estas argumentaciones.


Sección A = $\frac{5}{50}$

Seccion B = $\frac{7}{50}$

∴ Se elige la Sección A debido a que posee menos alumnos reprobados por lo que se puede deducir que es más factible para el curso ya que surgen las siguientes ideas:

→ más facil

→ mecanismo de Pruebas.

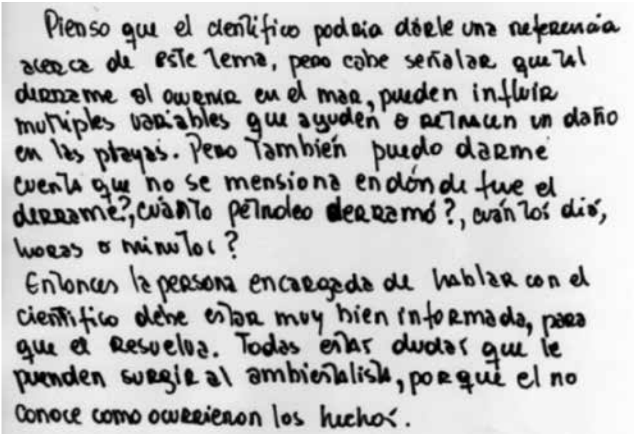
Lo que hace más probable para que reprobar.

Figura 15. Respuesta a la pregunta 3 del estudiante 2

La argumentación de la respuesta a la pregunta 3 planteada por el estudiante 2 (figura 15), deja en claro la presencia de una concepción proceso de la probabilidad de ocurrencia, puesto que la cuantifica y asigna un significado con base en las evidencias.

En la pregunta 4 la situación es bastante similar a la de la pregunta 3, puesto que 11 de los 12 estudiantes respondieron correctamente, mientras sólo 1 no respondió. Nuevamente evidenciamos la construcción proceso para la probabilidad de ocurrencia. En la figura 16 se muestra una de estas respuestas, dado que las argumentaciones otorgadas en todas son concordantes.

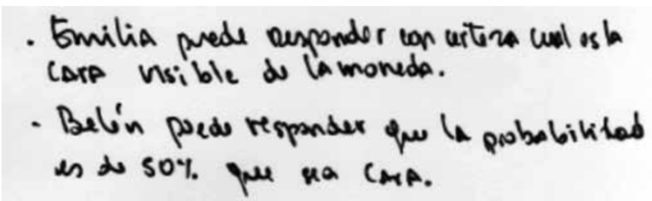
Los estudiantes reconocen que para asignar una probabilidad de ocurrencia al suceso, es necesario tener más información. Argumentan que no es posible asignar una probabilidad exacta al suceso de que el derrame se pueda controlar, sino que sólo se puede asignar una probabilidad en base a la opinión personal. Así se observa en la respuesta del estudiante 3 (figura 16).



Pienso que el científico podría darle una referencia acerca de este tema, pero cabe señalar que tal derrame al ocurrir en el mar, pueden influir multiples variables que ayuden o aumenten un daño en las playas. Pero también puedo darme cuenta que no se menciona en dónde fue el derrame?, cuánto petróleo derramó?, cuántos días, horas o minutos?
Entonces la persona encargada de hablar con el científico debe estar muy bien informada, para que el resuelva. Todas estas dudas que le pueden surgir al ambientalista, porque el no conoce como ocurrieron los hechos.

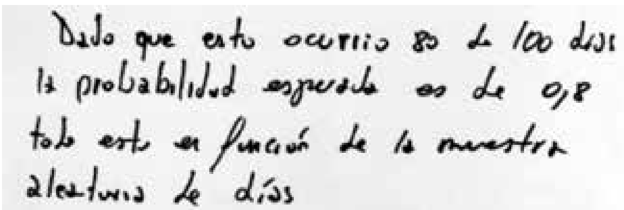
Figura 16. Respuesta a la pregunta 4 del estudiante 3

En las respuestas a las preguntas 5 y 6, evidenciamos la presencia de la construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia en este grupo de estudiantes, puesto que son capaces de asignar una probabilidad a un determinado suceso, y reflexionar sobre dicho valor. En las figuras 17 y 18 se muestran algunas de estas respuestas a modo de ejemplo.



- Emilia puede responder con certeza cual es la cara visible de la moneda.
- Belén puede responder que la probabilidad es de 50% que sea cara.

Figura 17. Respuesta a la pregunta 5 del estudiante 7



Dado que esto ocurrió 80 de 100 días la probabilidad esperada es de 0,8 todo esto en función de la muestra aleatoria de días

Figura 18. Respuesta a la pregunta 6 del estudiante 1

A partir de estas respuestas (figuras 17 y 18) evidenciamos que los estudiantes 7 y 1 asignan significado a la probabilidad de ocurrencia, situándose desde un enfoque bayesiano y uno frecuentista respectivamente.

Finalmente, a partir del análisis de las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, evidenciamos que el caso de estudio muestra una construcción proceso de la probabilidad de ocurrencia, puesto que son capaces de coordinar el proceso de espacio muestral y objeto métodos de conteo para la cuantificación de la certeza de un determinado suceso, al cual asignan una probabilidad de ocurrencia, además de reflexionar sobre ella atribuyéndole un significado.

Construcción esquema de los axiomas de probabilidad

Según lo expuesto en la DG hipotética, para que un estudiante muestre una construcción esquema de los axiomas de probabilidad, deberá haber asimilado el proceso de probabilidad de ocurrencia.

Dicha construcción quedará en evidencia cuando el estudiante utilice axiomas de probabilidad y las propiedades que se deducen a partir de éstos para resolver situaciones, por medio del uso de las relaciones entre los conceptos vinculados en el concepto de probabilidad.

Es posible observar esta construcción en 7 de los 12 estudiantes, mientras los 5 restantes resuelven de manera errónea, presentándose en estos casos ausencia de la construcción esquema de los axiomas de probabilidad. A continuación se muestran algunos ejemplos.

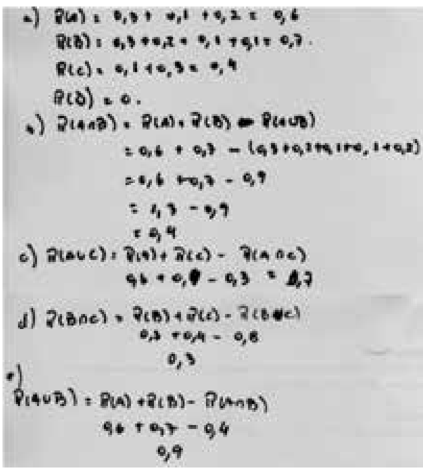
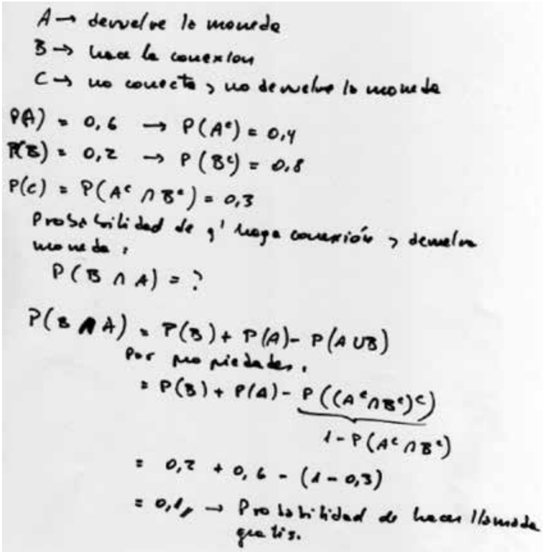


Figura 19. Respuesta a la pregunta 10 del estudiante 8



A → devuelve la moneda
B → hace la conexion
C → no conecta, no devuelve la moneda

$P(A) = 0,6 \rightarrow P(A^c) = 0,4$

$P(B) = 0,2 \rightarrow P(B^c) = 0,8$

$P(C) = P(A^c \cap B^c) = 0,3$

Probabilidad de q' haga conexión y devuelva moneda:

$P(B \cap A) = ?$

$P(B \cap A) = P(B) + P(A) - P(A \cup B)$

Por propiedades.

$= P(B) + P(A) - \underbrace{P((A^c \cap B^c)^c)}_{1 - P(A^c \cap B^c)}$

$= 0,2 + 0,6 - (1 - 0,3)$

$= 0,1 \rightarrow$ Probabilidad de hacer llamada gratis.

Figura 20. Respuesta a la pregunta 11 del estudiante 6

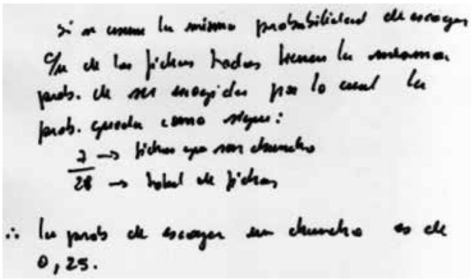
A partir de las respuestas a la preguntas 10 (figura 19) y 11 (figura 20) –mostramos las respuestas de dos estudiantes a modo de ejemplo–, estos estudiantes 8 y 6 evidencian una construcción esquema de los axiomas de probabilidad, dado que los utilizan y relacionan con el cálculo de probabilidad para un determinado suceso, lo cual coincide con lo propuesto en la DG hipotética. Ergo, podemos afirmar que estos datos sustentan dicha construcción mental propuesta en la DG hipotética.

Construcción objeto de cálculo de probabilidad

De acuerdo a la DG hipotética, la construcción objeto del cálculo de probabilidad se llevará a cabo por medio de la encapsulación de las construcciones esquema de probabilidad y proceso de probabilidad de ocurrencia. Dicha encapsulación dará lugar a la construcción objeto de cálculo de probabilidad.

Para evidenciar dicha construcción mostramos a continuación las producciones asociadas a las respuestas dadas a las preguntas 7, 8, 9, 12 y 13, que dan cuenta de la construcción objeto de cálculo de probabilidad. A través de ellas, el estudiante deberá desencapsular el objeto cálculo de probabilidad en los procesos regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, según corresponda. Además de determinar la probabilidad de un determinado suceso, deben mostrar una reflexión.

Para la pregunta 7, todos los estudiantes evidenciaron tener una construcción objeto del cálculo de probabilidad, puesto que desencapsularon dicho objeto en el proceso regla de Laplace para determinar la probabilidad de ocurrencia del suceso, asignando posteriormente un significado a dicho cálculo (figura 21).

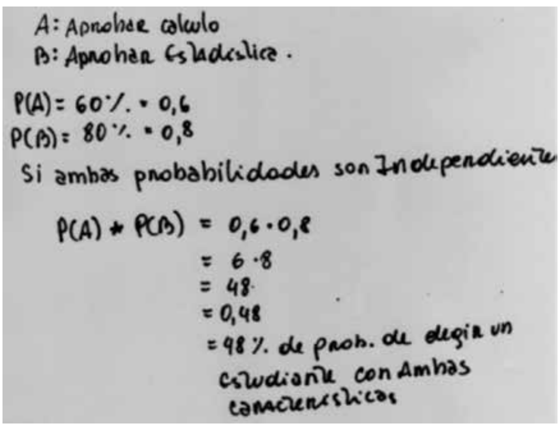

Si se tiene la misma probabilidad de escoger c/u de las fichas todas tienen la misma prob. de ser escogidas por lo cual la prob. queda como sigue:

$\frac{7}{28}$ 7 → fichas que son chancho; 28 → total de fichas

∴ la prob de escoger un chancho es de 0,25.

Figura 21. Respuesta a la pregunta 7 del estudiante 8

Al analizar las respuestas a la pregunta 8, se evidencia que 9 de 12 estudiantes muestran una construcción objeto del cálculo de probabilidad, puesto que desencapsulan el objeto en el proceso de cálculo de probabilidad para sucesos independientes, asignando un significado al cálculo de dicha probabilidad (figura 22).


A: Aprobar calculo
B: Aprobar Estadística.

P(A) = 60% = 0,6
P(B) = 80% = 0,8

Si ambas probabilidades son Independiente

P(A) * P(B) = 0,6 · 0,8
= 6 · 8
= 48
= 0,48
= 48 % de prob. de elegir un estudiante con Ambas características

Figura 22. Respuesta a la pregunta 8 del estudiante 3.

La pregunta 12 fue respondida de manera correcta por 5 de los 12 estudiantes. Es posible establecer que logran desencapsular la construcción objeto cálculo de probabilidad en el proceso teorema de Bayes, tal como se plantea en la DG hipotética (figura 23).

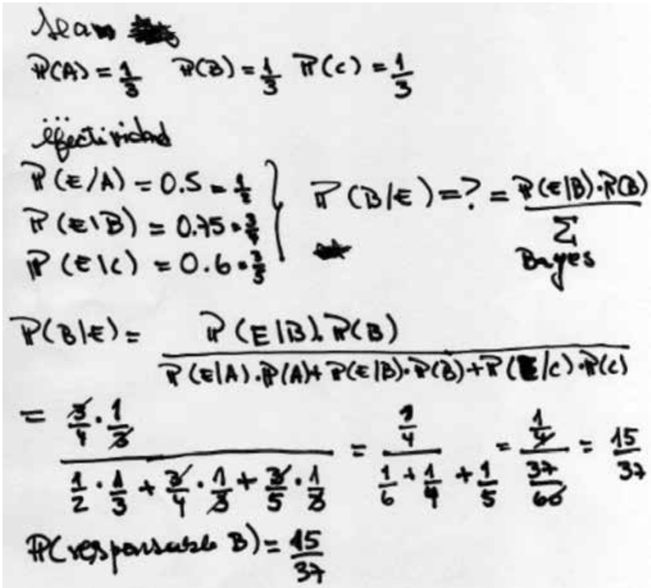


Figura 23. Respuesta a la pregunta 12 del estudiante 11.

Las respuestas a la pregunta 13, evidencian que al menos 4 estudiantes muestran una construcción objeto del cálculo de probabilidad, desencapsulando dicho objeto en el proceso probabilidad condicional, dadas las características de la situación planteada. Esto se evidencia en la respuesta del estudiante 11 (figura 24), quien asigna una probabilidad de ocurrencia a un determinado suceso, desencapsulando tal objeto en el proceso cálculo de probabilidad condicional.

En base a la evidencia empírica, podemos afirmar que los datos soportan la construcción mental de objeto para el cálculo de probabilidad, tal y como se propone en la DG hipotética.

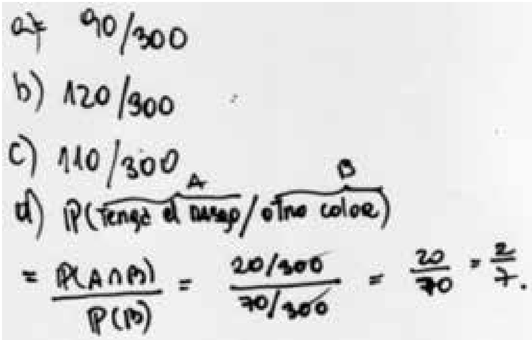


Figura 24. Respuesta a la pregunta 13 del estudiante 3

Construcción objeto del concepto de probabilidad

A partir del conjunto de diversas respuestas obtenidas al cuestionario, podemos afirmar que los estudiantes dispuestos en el caso de estudio evidencian una construcción objeto del concepto de probabilidad, puesto que han podido encapsular los procesos de regla de Laplace, probabilidad condicional, sucesos independientes y teorema de Bayes, atribuyéndoles una determinada forma de proceder, en función de la situación a la cual se enfrenten, además de asignar un determinado significado a dicho cálculo.

Así, con la aplicación y análisis de las respuestas, han quedado de manifiesto, en base a las respuestas otorgadas por los estudiantes, las construcciones y mecanismos mentales planteados en la DG hipotética para la construcción del concepto de probabilidad; es decir, se observan en su totalidad las construcciones y mecanismos mentales anunciados en nuestra descomposición genética lo que hace que nuestra DG sea un camino viable para la construcción del concepto en cuestión.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Por medio de esta investigación ha sido posible mostrar evidencias que han permitido la validez o el refinamiento de la hipótesis de la investigación, llamada DG, sustentando así, a partir de los datos mostrados en el caso de estudio, un modelo de construcción-aprendizaje del concepto de probabilidad. Al mismo tiempo, a partir del análisis y verificación de los datos obtenidos, mediante la aplicación del cuestionario, hemos logrado documentar la DG hipotética como un modelo de construcción del concepto de probabilidad, y de este modo dar respuesta a nuestro interrogante de investigación, lo que nos ha proporcionado la información necesaria para identificar y describir, en una primera aproximación, las construcciones y mecanismos mentales de este caso de estudio.

Uno de los principales resultados de este estudio se relaciona con la construcción objeto de sucesos, la cual es alcanzada por uno de los estudiantes a quienes se aplicó el cuestionario. Dicho estudiante logró identificar la necesidad de aplicar y relacionar los métodos de conteo; es decir, coordina la construcción objeto de métodos de conteo con la construcción proceso de espacio muestral, mediante la cual es posible dar respuesta al problema planteado conjuntamente con la construcción mental objeto de cálculo de probabilidad. Consideramos que la ausencia de esta construcción objeto en los otros estudiantes se debe a que éstos carecen de la construcción objeto de métodos de conteo, lo cual les impide reconocer la necesidad de aplicarlos a una determinada situación, además de la desencapsulación de la construcción objeto de métodos de conteo en los distintos procesos asociados.

Podemos deducir a partir de este estudio de caso que la construcción mental objeto del concepto de probabilidad es alcanzada. Puesto que los resultados nos muestran en toda su amplitud las construcciones mentales propuestas en la DG hipotética, es decir, la construcción objeto de sucesos, construcción proceso de probabilidad de ocurrencia, construcción esquema de los axiomas de probabilidad y construcción objeto de cálculo de probabilidad.

De acuerdo con la evidencia obtenida a partir de las respuestas y argumentos de este grupo de estudiantes universitarios de primer año, podemos proponer una primera respuesta desde este enfoque teórico a la pregunta de investigación *¿cómo los estudiantes universitarios de primer año construyen el concepto de probabilidad?*, siendo posible establecer que éstos construyen, en su gran mayoría, el concepto de probabilidad desde un enfoque frecuentista, y principalmente centrado en acciones sobre el objeto cálculo de probabilidades, más que en la desencapsulación de ese objeto en los procesos que lo conforman.

Es importante señalar que a partir de los resultados obtenidos en esta investigación, se cuenta con una DG documentada, refinada y viable, a partir de la cual es posible, si se quisiera, elaborar propuestas didácticas para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, para ser implementadas en estudiantes universitarios de primer año. Las cuales deberían considerar situaciones que, por un lado, aborden la dualidad de significados de la probabilidad, y por otro el tratamiento en profundidad de los métodos de conteo, todo ello con base en la ruta propuesta en la DG. Puesto que de acuerdo a las respuestas y argumentos dados por el estudio de caso a los cuales se aplicó el cuestionario, evidencian tener dificultades con la construcción objeto de los métodos de conteo y el mecanismo mental de desencapsulación asociado. Por esta razón, una propuesta didáctica en el tema probabilidad debería ahondar y propiciar que dicha construcción sea alcanzada por los aprendices.

Por otro lado, es importante señalar que esta investigación constituye una primera aproximación bajo la perspectiva de la teoría APOE al estudio del aprendizaje del concepto de probabilidad y viene a proponer un modelo de construcción para ser aplicado en contextos de aula a partir del diseño de una secuencia didáctica.

Dentro de las limitaciones de nuestro estudio se encuentra el reducido tamaño de la muestra, por lo que resultaría interesante replicar el estudio con un número mayor de estudiantes, lo que a su vez permitirá refinar aún más nuestra descomposición genética del concepto de probabilidad. Sin embargo, consideramos que esta indagación constituye un aporte a la matemática educativa y sobre todo a la comunidad interesada en el campo de la didáctica de la probabilidad específicamente en el aprendizaje del concepto de probabilidad desde el constructo teórico APOE.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottril, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa, M. Trigueros y K. Weller (2014), *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education,* Nueva York, Springer.

Asiala, M., A. Brown, D. J. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education", en J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II,* vol. 6, pp. 1-32.

Batanero, C. (2005), "Significados de la probabilidad en la educación secundaria", *Relime,* vol. 8, núm. 3, pp. 247-263.

——— (2008), "Significados de la probabilidad en la educación secundaria", en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoameri-*

cano, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Ediciones Díaz de Santos, pp. 27-40.

Beth, E. W. y J. Piaget (1980), *Epistemología matemática y psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real,* Barcelona, Crítica.

Carranza, P. y J. Fuentealba (2010), "Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística", *Unión,* núm. 24, pp. 57-68.

Contreras, J. M. (2011), "Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

De Groot, M. H. (1988), *Probabilidad y estadística,* México, Addison-Wesley Iberoamericana.

Díaz, C. (2007), "Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Dubinsky, E. (1991), "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

——— (1996), "Some thoughts on a first course in Linear Algebra at the college level", en D. Carlson, C. R. Jonson, D. C. Lay, D. Porter, A. Watkins y W. Watkins (eds.), *Resources for the teaching of linear algebra,* Washington, Mathematical Association of America, pp. 85-105.

Gómez, E. (2014), "Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Hacking, I. (1995), *El surgimiento de la probabilidad,* Barcelona, Gedisa.

Lecoutre, M-P. (1992), "Cognitive Models and problem spaces in 'Purely Random' Situations", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, núm. 6, diciembre, pp. 557-568.

Lecoutre, M-P. y J-L. Durand (1988), "Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 19, núm. 3, agosto, pp. 357-368.

Mohamed, N. (2012), "Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad", tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, España.

Parraguez, M. (2009), "Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial", tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN, México.

Parraguez, M. y A. Oktaç (2012), "Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial", *Paradigma*, vol. 33, núm. 1, junio, pp. 103-134.

Piaget, J. y R. García (1982, 1983, 1989), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI Editores.

Piaget, J. y B. Inhelder (1951), *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, París, Press Universitaires de France.

Trigueros, M. y A. Oktaç (2005), *La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 10, 157-176.

ANEXO

Instrumento utilizado para la toma de datos

Preguntas que componen el instrumento

Pregunta 1

Una persona lanza 8 veces la misma moneda (legal), obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda una novena vez, ¿qué es más posible que suceda cuando se lance la moneda por novena vez? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 2

Debes sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados.
Ganas si obtienes una bola blanca. ¿De qué caja prefieres hacer la extracción? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 3

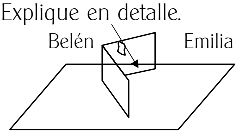
Carolina debe elegir entre dos secciones A o B del curso de estadística a inscribir para el próximo semestre. Si lo único que sabe es que el semestre pasado reprobaron 3 por cada 50 alumnos que tomaron la sección A y 7 por cada 50 alumnos que tomaron la sección B. ¿Qué sección le conviene tomar? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 4

Ocurrió un derrame de petróleo en el mar. Se pregunta a un científico ambientalista: "¿Cuál es la probabilidad de que este derrame pueda controlarse antes de que cause daño generalizado en las playas cercanas?"- ¿Qué piensa usted que puede contestar el científico? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 5*

Imaginemos dos personas frente a una mesa, Belén a la izquierda y Emilia a la derecha. Se coloca una hoja de papel sobre la mesa como muestra la figura. Se tira una moneda de tal manera que cae a la derecha de la hoja de papel, frente a Emilia. Claro está que Belén no tiene posibilidad de ver el resultado del lanzamiento. Se les pregunta a ambas ¿cuál es la probabilidad que la cara visible de la moneda sea cara? ¿Cómo son las respuestas de Belén y Emilia? Explique en detalle.



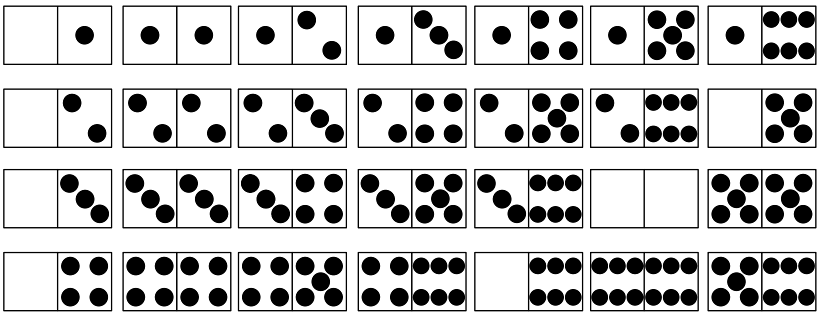
* Pregunta extraída de la investigación de Carranza y Fuentealba (2010).

Pregunta 6

Un ingeniero eléctrico estudia la demanda máxima en una planta generadora de electricidad. Observando que en 80 de los 100 días seleccionados aleatoriamente para el estudio, la demanda máxima se da entre 18:00 y 19:00 horas.
¿Cuál es la probabilidad de que la demanda máxima se comporte de la misma manera en cualquier otro día? ¿Por qué? Explique en detalle.

Pregunta 7

El juego del dominó consta de 28 fichas que se muestran a continuación:



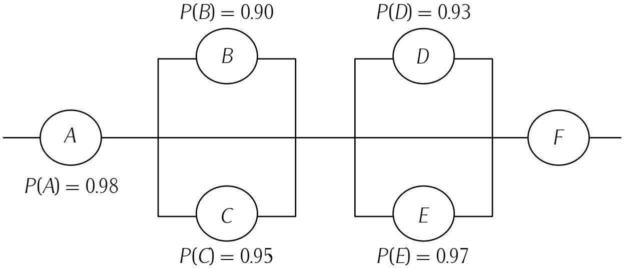
En este juego a aquellas fichas que tienen el mismo número de puntos (6, 5, 4, 3, 2, 1 ó 0) a ambos lados de la raya divisoria, se les llama "chancho". ¿Cuál es la probabilidad que una persona saque al azar un "chancho"? Explique en detalle.

Pregunta 8

Un grupo de estudiantes universitarios rendirá los exámenes finales de cálculo y estadística. Si sabemos que el porcentaje de aprobación del curso de cálculo es de un 60% y el de estadística de un 80%, suponiendo que las calificaciones obtenidas en cada uno de los cursos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un estudiante al azar éste haya aprobado ambos cursos? Explique en detalle.
* Pregunta extraída de la investigación de Batanero (2005).

Pregunta 9

Un sistema contiene cinco componentes que se encuentran conectadas entre sí como se muestra en la figura, donde las probabilidades indican la seguridad de que la componente funcione adecuadamente. Si el funcionamiento de una componente en particular es independiente del de las demás, ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema trabaje? Explique en detalle.



Pregunta 10

El peso de un dado ha sido alterado de manera que los resultados produzcan la siguiente distribución de probabilidad:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.1	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2

Considere los eventos:

$A = \{\text{número par}\}$; $B = \{2,3,4,5\}$; $C = \{x : x < 3\}$; $D = \{x : x > 7\}$

Determine:

a) La probabilidad de ocurrencia para cada uno de los eventos anteriores.
b) $P(A \cap B)$
c) $P(A \cup C)$
d) $P(B \cap C)$
e) $P(A \cup U)$

Pregunta 11

Cierto teléfono público (que usualmente falla) devuelve la moneda insertada con probabilidad 0,6; hace la conexión con el número que uno marca con probabilidad 0,2; se queda con la moneda y no da la conexión requerida con probabilidad 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona haga la llamada gratis? Explique en detalle.

Pregunta 12

Un paciente de cáncer está siendo tratado con una combinación de tres fármacos. Se observa que cuando se utilizan simultáneamente, la probabilidad de que los tres fármacos se inactiven es de 1/3.

La efectividad de cada fármaco, con respecto a producir una remisión del tumor, es diferente. El fármaco A se ha mostrado efectivo en un 50% de los casos; el fármaco B en un 75%, y el fármaco C en un 60%.

La enfermedad remite en el paciente. ¿Cuál es la probabilidad de que el responsable de ello sea el fármaco B? Explique en detalle.

Pregunta 13

Suponga que cierto rasgo oftálmico está asociado con el color de ojos. Se estudiaron 300 individuos elegidos aleatoriamente, con los resultados siguientes:

	Color de ojos			
Rasgos	**Azul**	**Café**	**Otro**	**Totales**
Presencia	70	30	20	120
Ausencia	20	110	50	180
Totales	90	140	70	300

Calcular la probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente:
a) Tenga los ojos azules.
b) Tenga el rasgo.
c) No tenga el rasgo y presente ojos café.
d) Tenga el rasgo dado que presentó otro color de ojos (no azul ni café).

Pregunta 14

Dos amigos, Nicolás y Fernando, decidieron este semestre inscribir Tenis como curso deportivo con la idea de entrenar juntos, pero les acaban de avisar que los 90 alumnos aceptados serán distribuidos aleatoriamente en tres secciones de 30 alumnos cada una. ¿Cuál es la probabilidad que los dos amigos queden en la misma sección y puedan entrenar juntos durante el semestre tal como lo tenían planificado si es que ya fueron aceptados en el deportivo? Explique en detalle.

DATOS DE LAS AUTORAS

Claudia Vásquez Ortiz
Pontificia Universidad Católica de Chile
cavasque@uc.cl

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
marcela.parraguez@ucv.cl

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE

Hilda Salgado y María Trigueros

Resumen: En el aprendizaje del Álgebra Lineal se observan problemas debido a que los conceptos resultan a menudo complejos por su alto nivel de abstracción. El tema correspondiente a los valores, vectores y espacios propios es muy abstracto, pero importante dadas sus múltiples aplicaciones. En este artículo se reportan los resultados de una investigación acerca del aprendizaje de los alumnos en un curso en el que estos conceptos se enseñaron usando un diseño didáctico basado en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Se presenta la descomposición genética diseñada y el análisis de los resultados del trabajo realizado por los alumnos en relación a los conceptos de interés. Los resultados validan la descomposición genética propuesta y muestran evidencias del aprendizaje de los alumnos. En particular ponen de manifiesto la posibilidad de construir una concepción objeto de los conceptos en estudio y la construcción de la mayoría de los alumnos de una concepción proceso.

Palabras clave: valor propio, vector propio, espacio propio, teoría APOE, descomposición genética.

A teaching experience of eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces based on APOS Theory

Abstract: When teaching Linear Algebra, given the complexity and high level of abstraction of the concepts involved in its learning, several problems arise. Eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces are very abstract concepts, but due to their multiples applications are important to learn. This paper reports on the results of a research project that studies students' learning of these concepts in a course that followed a specific didactical design based on APOS Theory.

Fecha de recepción: 19 de junio de 2014; fecha de aprobación: 19 de diciembre de 2014.

The results obtained permited to validate the designed genetic decomposition. The analysis of students' work related to the above mentioned concepts shows evidence of students' learning. In particular, they show the possibility of building an object conception of the studied concepts and the construction of a process conception by most students.

Keywords: eigenvalue, eigenvector, eigenspace, APOS Theory, genetic decomposition.

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es una rama de las Matemáticas con muchas aplicaciones a problemas prácticos de diversas disciplinas. Ello ha conducido a que se convierta en un curso obligatorio para los alumnos de distintas licenciaturas. Sin embargo, la investigación en Matemática Educativa acerca del Álgebra Lineal muestra que los alumnos presentan dificultades en su aprendizaje y que esas dificultades están relacionadas con la naturaleza abstracta de los conceptos que integran esta materia, es decir, con la gran cantidad de definiciones que se incluyen y el manejo formal que se hace de ellas (Larson *et al.*, 2007; Sierpinska, 2000; Possani *et al.*, 2010). En las investigaciones se detalla que los alumnos generalmente consideran al Álgebra Lineal como un conjunto de algoritmos que les permiten resolver problemas específicos. Por ello, se esfuerzan únicamente en memorizar los procedimientos requeridos en la solución de los problemas y no ponen atención a la comprensión de los conceptos que subyacen a ellos. La investigación señala también que después de un curso de esta materia, en el que se enseñan definiciones de conceptos y teoremas, la mayoría de los alumnos no los comprenden y son incapaces de usarlos en la solución de problemas no rutinarios (Thomas y Stewart, 2011).

Un tema importante en el estudio del Álgebra Lineal es el de los valores, vectores y espacios propios. Este tema resulta, de acuerdo a la opinión de maestros y de los propios alumnos, particularmente difícil. Estos conceptos juegan, sin embargo, un papel fundamental en muchas aplicaciones, como en problemas relacionados con ecuaciones en diferencia, ecuaciones diferenciales, procesos de Markov, potencias de matrices y estadística multivariada. Los estudios realizados en el contexto de la Educación Matemática indican que la mayoría de los alumnos suelen memorizar los algoritmos relacionados con estos conceptos durante el curso pero no los comprenden y que la mayoría de los maestros y los libros de texto no consideran la importancia de su interpretación geométrica en la posibilidad de comprenderlos a profundidad. (Thomas y Stewart, 2011; Gol, 2012).

Este trabajo tiene como objetivo investigar la forma en que los alumnos construyen los conceptos de valor, vector y espacio propio a través de una experiencia didáctica diseñada con base en los principios y la metodología de la teoría APOE. Este conocimiento puede ser útil en el diseño de estrategias de enseñanza que permitan a los alumnos construir estos conceptos a mayor profundidad, determinar su pertinencia frente a distintas aplicaciones y utilizarlos en la solución de problemas. Por lo anterior, las preguntas que se plantean en este estudio son: ¿Qué construcciones requieren los alumnos para aprender los conceptos de valores, vectores y espacios propios? ¿Es posible favorecer esas construcciones mediante actividades diseñadas con la teoría APOE?

ANTECEDENTES

Como se mencionó anteriormente, las investigaciones relacionadas con el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios son escasas en la literatura. Los resultados obtenidos en cada una de ellas se describen a continuación.

Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich (2007) usaron las Teorías Modelos y Modelación y Educación Matemática Realista para diseñar una actividad de modelación con el objetivo de enseñar valores y vectores propios. La actividad propone la búsqueda de un modelo para distribuir convenientemente un número dado de autos en diferentes locales de renta, de manera que siempre haya autos disponibles en cada uno de ellos. El análisis de los datos muestra que los alumnos aplicaron tres estrategias en el planteamiento y la resolución del problema: uso de potencias de matrices en un proceso de Markov; uso de un sistema de ecuaciones lineales e interpretación de las estadísticas de redistribución de los autos en los diferentes locales. En ninguno de los casos los alumnos requirieron directamente los valores y vectores propios por lo que los maestros involucrados en el estudio tuvieron dificultades al buscar una manera de introducirlos. Los investigadores concluyen que a pesar de que la primera estrategia de modelación puede relacionarse con los valores y vectores propios, su necesidad es tardía en el trabajo con el modelo. Ello no permitió alcanzar el fin deseado y, como consecuencia, se consideró que la actividad de modelación sugerida no es adecuada para la enseñanza de estos conceptos.

Thomas y Stewart (2011) y Stewart y Thomas (2007) centraron su investigación en un acercamiento enactivista y personificado (*embodied)* para analizar la forma en que los alumnos entienden los valores propios y los vectores propios asociados a ellos y cómo los relacionan con su representación geométrica. Concluyen que los alumnos manejan los procedimientos algebraicos para encontrarlos, pero la mayoría no conoce su representación geométrica y al presentárselas no son capaces de relacionar ambas representaciones. Su evidencia muestra, además, que si los alumnos reconocen esta relación, logran una mejor comprensión de estos conceptos. Sugieren, por último, la importancia de trabajar con ambas en la enseñanza.

Gol (2012) entregó a sus alumnos matrices, $A_{2\times 2}$, multiplicadas por un vector, $A\bar{x}$, y les pidió que encontraran los valores y vectores propios asociados a esa matriz usando un programa de computadora. Mediante este programa los alumnos podían mover los vectores en la pantalla hasta encontrar dónde $\bar{x}$ y $A\bar{x}$ eran paralelos y tenían la misma dirección. De esta forma hallaban el valor propio positivo, λ, asociado a la matriz y el vector propio correspondiente. La autora analizó con los alumnos qué sucedía cuando el valor propio asociado a la matriz era negativo. Posteriormente, realizó una entrevista en la que encontró que sus alumnos usaban manos y brazos para expresar su imagen mental de estos conceptos. Concluyó que el uso de la computadora estimuló la formación de imágenes dinámicas de los conceptos de interés que los alumnos manifestaron en la entrevista a través de sus gestos corporales. Esta experiencia permitió a los alumnos ver la dirección de los vectores y su posición en el plano, estudiar vectores colineales con dirección opuesta, entender a los vectores propios como vectores "especiales" que son colineales con el vector que se obtiene al multiplicarlos por la matriz, y analizar el comportamiento de su transformación bajo la matriz A, así como sus propiedades.

De este breve resumen es posible observar que aunque se ha hecho investigación sobre el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios y se cuenta con resultados que proporcionan información útil para profundizar en este tema, es necesario llevar a cabo más investigación para entender la forma en que los alumnos aprenden estos conceptos. En esta investigación se eligió como marco teórico la teoría APOE, ya que se enfoca precisamente en el estudio de las construcciones involucradas en el aprendizaje e incluye el diseño de una estrategia para la enseñanza.

MARCO TEÓRICO

Como se mencionó antes esta investigación utilizó la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Esta teoría cognitiva fue desarrollada como parte de un esfuerzo por entender cómo las matemáticas se aprenden y qué se podía hacer en la enseñanza para ayudar a los alumnos en su aprendizaje. Se intenta explicar fenómenos que se observan cuando los alumnos están tratando de aprender conceptos matemáticos. Se utiliza el análisis de dichos fenómenos en términos de las construcciones mentales de los alumnos para sugerir acciones didácticas que apoyen el proceso de aprendizaje (Arnon *et al.*, 2014).

Las Acciones son transformaciones de los objetos cognitivos previamente construidos que un alumno percibe como externas o que constituyen instrucciones que el alumno requiere para realizar cada operación de un procedimiento. La realización de acciones constituye el inicio de la construcción de cualquier concepto matemático: por ello, juegan un papel sumamente importante.

Cuando la acción o las acciones se repiten, el alumno puede reflexionar sobre ellas de tal forma que ya no requiere de las instrucciones externas, las puede imaginar o llevar a cabo sin seguir el orden específico dado por las acciones. En este caso, se considera, en la teoría, que las acciones han sido interiorizadas en un Proceso. El proceso hace una transformación semejante a la de la acción o acciones sin necesidad de algún estímulo externo o de seguir pasos memorizados; en otras palabras, el alumno tiene más control sobre la transformación o transformaciones que requiere aplicar.

Cuando un alumno enfrenta la necesidad de hacer acciones sobre un proceso y se da cuenta de su totalidad, puede encapsular el proceso en un Objeto cognitivo. Este alumno ha construido una concepción objeto de un concepto matemático si es capaz de trabajar con él como una entidad, la cual puede transformar mediante nuevas acciones, o analizar sus propiedades.

El Esquema para determinado tema matemático o concepto es la colección de acciones, procesos, objetos u otros esquemas que un alumno ha construido, que están unidos entre sí mediante relaciones de naturaleza diversa y que el alumno evoca, de manera no necesariamente consciente, como un marco más o menos coherente en la solución de problemas específicos ligados a los conceptos matemáticos relacionados con el esquema. Cuando el esquema es coherente, el alumno es capaz de reconocer aquellas situaciones donde puede aplicarse y discriminar entre los tipos de problemas que pueden o no resolverse mediante su uso. El alumno puede, además, conocer sus posibilidades y limitaciones.

El alumno puede considerar al esquema como un objeto sobre el cual puede ejecutar nuevas acciones. Cuando esto ocurre se considera que el alumno ha tematizado al esquema. Notamos entonces que en la teoría APOE existen dos formas de construir objetos mediante la encapsulación de un proceso o mediante la tematización de un esquema.

En la teoría APOE se propone que a partir de estas estructuras y de los mecanismos asociados a su construcción es posible diseñar un modelo teórico detallado de la construcción de cada concepto específico. Este modelo se conoce como descomposición genética del concepto en cuestión. El diseño de una primera descomposición genética puede partir del análisis epistemológico o histórico de las matemáticas involucradas, del análisis de los resultados encontrados en la literatura sobre el concepto en cuestión, de la experiencia de los investigadores como maestros o de una combinación de estos factores.

Una vez diseñada una descomposición genética preliminar se utiliza en la investigación para analizar las construcciones que muestran distintos alumnos cuando están aprendiendo el concepto o los conceptos de interés. Estas construcciones se manifiestan a través del trabajo y las explicaciones de los alumnos cuando resuelven actividades, ejercicios y problemas relacionados con ese concepto.

Los resultados de la investigación se utilizan para refinar, si es necesario, la descomposición de manera que sea más congruente con la forma observada en la que aprenden los alumnos. Este proceso de investigación y refinación puede repetirse hasta obtener una nueva descomposición que permite enseñar de manera efectiva el concepto y explicar las construcciones propuestas como necesarias para su aprendizaje. Es importante notar que una descomposición genética no es única. Pueden coexistir distintas descomposiciones genéticas de un mismo concepto, siempre y cuando den cuenta de la construcción del mismo de forma adecuada.

Usando la descomposición genética como modelo de aprendizaje de un concepto o un tema de las matemáticas, es posible diseñar actividades que permitan a los alumnos aprender el concepto a través de las construcciones que esta predice. Estas actividades se utilizan en el aula siguiendo un ciclo de enseñanza específico y también para obtener datos para la investigación.

El ciclo de enseñanza, conocido como ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios) comienza por el trabajo colaborativo de los alumnos con actividades diseñadas en términos de la descomposición genética. Después se discuten los resultados de ese trabajo con todo el grupo y finalmente se dejan ejercicios para que los alumnos los trabajen como tarea. Este ciclo de enseñanza se repite hasta que se han trabajado todas las actividades diseñadas.

METODOLOGÍA

La teoría APOE incluye una metodología de investigación que consta de tres partes y se describen a continuación:

- Diseño de una descomposición genética del concepto matemático de interés.
- Desarrollo e implementación de métodos de instrucción basados en el análisis teórico en los que es posible utilizar el ciclo ACE como estrategia de enseñanza conjuntamente con otras estrategias tales como aprendizaje colaborativo y/o programación en computadora.
- Recolección y análisis de datos para poner a prueba y refinar, si es necesario, la descomposición genética preliminar y las actividades de instrucción.

En esta sección se presenta la descomposición genética diseñada seguida de la descripción del desarrollo de la instrucción. Se ejemplifican y se analizan, utilizando el marco teórico, algunas actividades utilizadas en clase así como algunos instrumentos de investigación diseñados. Se describe la metodología en la recolección y el análisis de datos.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

En concordancia con la metodología de la teoría APOE, en la presente investigación se diseñó, en primer término, la descomposición genética preliminar relativa a los conceptos de valores, vectores y espacios propios de una matriz. En este diseño se consideró la experiencia de las investigadoras como maestras de Álgebra Lineal y los resultados reportados en la literatura relacionados con estos conceptos.

Se considera que los conocimientos previos necesarios para iniciar la construcción de estos conceptos son:

- Los conceptos de matriz y vectores como objetos.
- El proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema, espacio nulo de una matriz y conjunto generador de un espacio vectorial como procesos.

A partir de las construcciones previas se requieren las siguientes construcciones:

- Se realizan acciones de multiplicar una matriz A por un vector para encontrar que este producto resulta en un nuevo vector. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite concebir el vector resultante del producto para cualquier matriz y cualquier vector sin necesidad de calcularlo explícitamente.
- Se hacen acciones tanto geométricas como algebraicas para encontrar el producto de un vector por un escalar. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite a los alumnos considerar el resultado de estas acciones como una transformación de un vector en un nuevo vector paralelo al primero y en el que se asocia el signo del escalar con la dirección del vector resultante.
- La necesidad de comparar los vectores resultantes de los dos procesos anteriores y considerar las condiciones que se requieren para que sean iguales, permite encapsular la ecuación resultante como un objeto y nombrar al escalar y al vector que en ella aparecen como valor y vector propio, respectivamente.
- Se realizan acciones sobre la ecuación resultante para determinar qué condiciones debe cumplir el escalar para que la ecuación tenga solución no trivial. Estas acciones se interiorizan en un proceso en el cual no es necesario realizar cada acción para encontrar el escalar y el vector correspondiente que satisfacen la ecuación.
- El proceso anterior puede revertirse para determinar si un escalar es valor propio de una matriz y encontrar los vectores propios correspondientes.
- El último proceso se coordina con el segundo en un proceso geométrico donde la relación entre el escalar y el vector puede realizarse mentalmente para cualquier vector.
- Este proceso se encapsula en un objeto donde el escalar y el vector

que satisfacen la ecuación se consideren como entidades que pueden definirse y nombrarse como valor y vector propio de una matriz dada y sus propiedades pueden determinarse.

- Los procesos anteriores se coordinan con el proceso de solución de un sistema homogéneo de ecuaciones en un nuevo proceso que permite a los alumnos interpretar el proceso de encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada como el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones.
- El último proceso se coordina con el proceso de espacio nulo de una matriz en un proceso que permite reconocer el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones como el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema.
- La coordinación de los procesos anteriores con el proceso de conjunto generador de un espacio vectorial resulta en un proceso que permite identificar al espacio nulo de la matriz del sistema de ecuaciones como un espacio generado correspondiente a cada valor propio y sus vectores propios asociados. La necesidad de comparar espacios generados por diferentes vectores propios permite la encapsulación del proceso de espacio generado en un objeto definido como espacio propio correspondiente a un valor propio de la matriz.
- Las acciones, procesos u objetos correspondientes a los valores, vectores y espacios propios se relacionan entre sí en un esquema que podría denominarse esquema de valores propios. Este esquema permite a los alumnos reconocer, en situaciones diversas, la pertinencia de los valores, vectores y espacios propios, así como la forma de encontrarlos.

Desarrollo general de la investigación

La instrucción se llevó a cabo con alumnos que cursaban la materia de Álgebra Lineal de la licenciatura en Economía en una universidad privada. La instrucción siguió el ciclo ACE antes descrito. Se repitió el trabajo de enseñanza e investigación durante cinco semestres (2011-2013). El número de alumnos varió por uno o dos alumnos y los resultados obtenidos fueron similares, por tal motivo se decidió presentar los resultados en términos del promedio de alumnos por semestre. En promedio los grupos estaban formados por 34 alumnos que trabajaron en un conjunto de actividades colaborativamente en pequeños equipos de tres y cuatro miembros. En cada ocasión que trabajaron las actividades tuvieron oportunidades de discutir y reflexionar sobre su trabajo. El trabajo en las actividades se discutió entre la maestra y el grupo completo. En esta discusión la maestra cuestionó, comparó y aclaró las opiniones y dudas y formalizó los conceptos incluidos en las actividades. Por último, la maestra dejó algunas actividades y ejercicios convencionales como tarea para reforzar el proceso de reflexión de acuerdo a la metodología de enseñanza de la teoría APOE.

Este ciclo se repitió hasta que se utilizaron todas las actividades correspondientes al tema. Mientras los alumnos trabajaban en equipo, la maestra los apoyó con preguntas pertinentes para estimular la reflexión sobre su trabajo y para ayudar a su progreso en la solución de las tareas incluidas en las actividades. Una de las investigadoras fue la maestra del curso, ya que se consideró que, en esta etapa de la investigación, otro maestro necesitaría de mucha preparación previa.

Todo el trabajo de los alumnos se recogió para ser analizado por las investigadoras en términos de las construcciones descritas en la descomposición genética. Además, la maestra llenó una bitácora después de cada clase en la que describió el trabajo de los alumnos, las dificultades encontradas, las ideas interesantes que surgieron del trabajo de los alumnos, etc. Esta bitácora fue analizada por las investigadoras. Los resultados del análisis fueron discutidos y negociados entre ellas.

Al finalizar con el trabajo de enseñanza de los conceptos de interés se realizó un examen parcial sobre el tema que incluyó siete preguntas con distintos niveles de complejidad y, al final del curso, se aplicó un examen final de cuatro preguntas relacionadas con valores, vectores y espacios propios. Algunas de estas preguntas fueron semejantes a las usadas en las actividades, otras consistieron en preguntas que requerían la realización de inferencias a partir del conocimiento construido. Se pidió a los alumnos que justificaran por escrito sus procedimientos y respuestas. Las preguntas de ambos exámenes fueron analizadas por las investigadoras en los mismos términos que el trabajo en clase y los resultados discutidos entre ellas.

Con base en el análisis de las preguntas del examen parcial se eligió a seis alumnos en cada semestre para hacer una entrevista semiestructurada con el fin de profundizar en el análisis de las construcciones involucradas en el aprendizaje de los conceptos de valor, vector y espacio propio. Los alumnos se eligieron considerando que en el trabajo previo hubieran mostrado distinto tipo de construcciones de acuerdo al análisis; dos alumnos con concepción acción, dos alumnos con concepción proceso y dos alumnos con concepción objeto o cercanos a la concepción objeto.

Diseño de actividades

Se diseñó un conjunto de actividades didácticas con el fin de apoyar a los alumnos en la construcción de los conceptos de interés a través de la promoción de las acciones, de oportunidades de reflexión e interiorización, así como de coordinación de diferentes procesos y de encapsulación de objetos referidos en la descomposición genética.

Se inicia con algunas actividades cuyo objetivo es construir una relación entre la interpretación algebraica y geométrica de los valores y vectores propios para que los alumnos reflexionen sobre el hecho de que la ecuación $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ implica que el producto $A\bar{v}$ es un vector paralelo a $\bar{v}$. El enfoque geométrico se trabajó en R^2 y más adelante fue generalizado a R^n.

Otras actividades se dirigieron a que el alumno hiciera las acciones para encontrar los valores, vectores y espacios propios de distintas matrices, así como para favorecer la interiorización de estas acciones en procesos. Se incluyeron además actividades destinadas a la coordinación de procesos y a la encapsulación de los objetos mencionados en la descomposición genética.

Durante la discusión en clase sobre las actividades, se brindó a los alumnos nuevas oportunidades de reflexión, de formalización de los conocimientos y se introdujeron las definiciones y teoremas correspondientes.

Es importante notar que aunque en este artículo se presentan únicamente algunos ejemplos de las actividades empleadas, los alumnos trabajaron en varias actividades semejantes a las que aquí se muestran, con datos diferentes, con el fin de brindarles oportunidades de reflexión sobre sus acciones y alentar la posibilidad de su interiorización en los procesos correspondientes. Algunos ejemplos de las actividades diseñadas, conjuntamente con su análisis en términos de la descomposición genética se presentan a continuación.

Un ejemplo de actividad en la que se busca que los alumnos hagan acciones específicas es el siguiente.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\bar{v}_1 = (3, -2)$ *y* $\bar{v}_2 = (1, -2)$*. Encuentra y grafica* $A\bar{v}_1$ *y* $A\,\bar{v}_2$*. ¿Qué obtienes como resultado? Dibuja en la gráfica* *los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ ¿Qué observas? ¿Son estos vectores paralelos a $A\bar{v}_1$ y $A\bar{v}_2$ respectivamente? Cuando el producto, $A\bar{v}$, da como resultado un vector paralelo a $\bar{v}$, decimos que el vector $\bar{v}$ es un vector propio de la matriz A. ¿Son estos vectores propios de la matriz A?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de multiplicar la matriz por el vector, $A\bar{v}$ y encuentren que el resultado es un vector que, en ocasiones, es paralelo al vector $\bar{v}$, $\lambda\bar{v}$. Esta acción y la reflexión sobre su resultado permiten reconocer que en el caso del vector $\bar{v}_2$, $A\bar{v}_2 = 4\bar{v}_2$, el nuevo vector es paralelo al primero y, por lo tanto, $\bar{v}_2$ es vector propio de A. En el caso de $\bar{v}_1$, los vectores resultantes no son paralelos, por lo que no se trata de un vector propio de A. Al hacer la gráfica se espera que los alumnos construyan el proceso correspondiente a la relación entre la interpretación algebraica y la geométrica.

La repetición de actividades como la anterior para diferentes matrices y la reflexión sobre los resultados obtenidos permiten la interiorización de las acciones realizadas en un proceso que da cuenta de cuándo un valor y un vector pueden considerarse como valor y vector propio de una matriz y la construcción de la coordinación de este proceso con el proceso de representación geométrica de estos conceptos.

Otro ejemplo de una actividad cuyo objetivo es la realización de acciones en el contexto de la representación gráfica relativas a los conceptos de valor y vector propios, es la que sigue:

En las siguientes gráficas, ¿$\bar{v}$ es vector propio de la matriz A?

Se espera que los alumnos hagan la acción de relacionar la dirección de los vectores resultantes del producto de la matriz por el vector y del escalar por el vector para reconocer que únicamente cuando estos vectores son paralelos, se satisface la igualdad entre ellos para alguna λ específica. En este caso, el vector $\bar{v}$ es un vector propio de la matriz A. Esta reflexión permite, nuevamente construir la relación entre la interpretación algebraica y la geométrica de los vectores propios.

En esta actividad se incluyeron varias gráficas similares (figura 1) para discriminar entre los casos en los que la igualdad se cumple de aquellos en los que no se cumple. La reflexión sobre estas actividades puede permitir la interiorización de estas acciones en un proceso que dé reconocimiento geométrico de los vectores y los valores propios. Además propicia la coordinación del proceso gráfico de definición de los vectores propios con el proceso algebraico correspondiente. También puede conducir a la interiorización de los procesos correspondientes a relaciones con distintos conceptos tratados previamente en

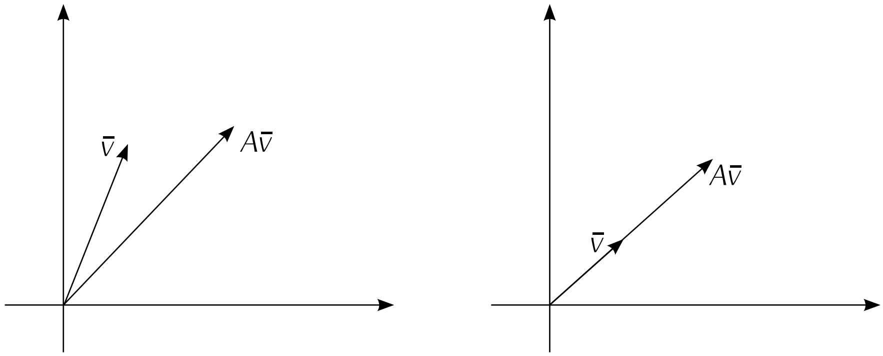


Figura 1

el curso como, por ejemplo, combinación lineal, dimensión o independencia lineal. La interpretación geométrica se trabajó en R^2 y después se generalizaron los conceptos a R^n.

La siguiente actividad muestra un ejemplo de aquellas que intentan promover la coordinación de distintos procesos construidos en nuevos procesos.

Encuentra los valores, vectores y espacios propios asociados a una matriz dada A.

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de comparación $A\bar{v}$ y $\lambda\bar{v}$ con el de solución de un sistema homogéneo de ecuaciones en un nuevo proceso en el que se determinan las condiciones que permiten encontrar los valores y vectores propios a través del uso del determinante (el polinomio característico $p(\lambda)=|A-\lambda I|$). Se espera también que los alumnos coordinen el proceso de solución del sistema homogéneo correspondiente a cada valor propio con el proceso de encontrar los vectores propios correspondientes. Por último, se espera que algunos alumnos coordinen el proceso del conjunto solución para cada valor propio con el proceso de espacio generado por los vectores propios encontrados para construir el proceso de espacio propio.

La forma en que los alumnos abordan distintos problemas de esta naturaleza podría dar evidencia de que los alumnos han construido una concepción proceso o una concepción objeto de los conceptos de valor, vector y espacio propio. También podría dar evidencia de su posibilidad de coordinar las representaciones geométrica y algebraica y de la posibilidad de coordinar estos procesos con los construidos para otros conceptos del mismo curso.

Diseño de instrumentos

Se diseñó un cuestionario como instrumento para analizar las construcciones de los alumnos. Como se mencionó, esta investigación se realizó durante varios semestres, por lo que se eligieron distintas preguntas cada semestre para hacer un examen final y un parcial. Esto con la finalidad de que en los distintos semestres los exámenes no fueran iguales. El examen parcial se aplicó después de que los alumnos hicieran las actividades y se discutiera el tema en clase. El examen final se utilizó al terminar el curso. Ambos exámenes se analizaron por las dos investigadoras y los resultados se negociaron entre ellas.

Finalmente, se diseñó una entrevista semiestructurada cuya estructura fue similar a la del examen parcial. Incluyó, en cada semestre, las preguntas de los exámenes y otras diseñadas especialmente para la entrevista con el objetivo de aclarar y/o profundizar en las posibles construcciones mostradas por los alumnos y basadas justamente en esas respuestas. Estas preguntas se usaron a discreción de la entrevistadora dependiendo de la especificidad ofrecida por el alumno entrevistado en sus respuestas. La entrevista con cada alumno tuvo una duración aproximada de una hora. Se grabó y se guardaron todas las producciones de los alumnos. La información se analizó de manera similar a la descrita para el análisis de los exámenes.

A continuación se presentan algunas de las preguntas junto con su análisis en términos de la descomposición genética.

¿Cuántos valores propios distintos puede tener, cuando mucho, una matriz $A_{4\times4}$?
En este caso los alumnos pueden ofrecer distintas respuestas. Algunos pueden considerar que el polinomio característico de una matriz $A_{4\times4}$, es de cuarto grado, por lo que pueden concluir que tendrá cuatro raíces diferentes y por ello la matriz tendrá cuando mucho cuatro valores propios distintos. Estos alumnos mostrarán una concepción acción si se determina que responden de manera memorizada, o proceso si son capaces de ofrecer alguna explicación que refleje la posible interiorización del concepto de valor propio.

Otros alumnos pueden responder que si es posible asociar vectores propios linealmente independientes al mismo valor propio, y dado que éstos están en R^4, la matriz tendrá máximo cuatro vectores propios. Los alumnos que dan esta respuesta han construido la coordinación de los procesos de vectores y valores propios de la matriz A y la coordinación del proceso resultante con el proceso de espacio vectorial. Si muestran evidencia de poder determinar mediante acciones o procesos la independencia lineal de los vectores asociados al mismo valor propio muestran la encapsulación del proceso de valores y vectores propios en un objeto.

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$*. Sin hacer operaciones, demuestra que* $\lambda = -2$ *es valor propio.*

Los alumnos entienden que lo que se pide por "sin hacer operaciones" es que no resuelvan en papel el polinomio característico. Se espera que los alumnos muestren evidencia de haber construido un proceso para valores propios que puedan coordinar con el proceso de dependencia lineal de las columnas de la matriz $A - \lambda I$ correspondiente al valor propio dado. En este caso, muestran que pueden coordinar el proceso resultante con el determinante de un sistema homogéneo de ecuaciones, que será cero, por lo que el sistema asociado a la matriz tiene solución múltiple y responderán que $\lambda = -2$ es un valor propio de la matriz A. Aquellos alumnos que requieran hacer las operaciones explícitamente y resolver el polinomio característico darán evidencia de que han construido una concepción acción de valores propios.

Sin hacer cálculos encuentra un valor propio y dos vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$*. ¿Por qué se piden dos vectores propios?*

Se espera que los alumnos que hayan construido una concepción proceso, como en la pregunta anterior, consideren el hecho de que las columnas de la matriz son linealmente dependientes y asocien este hecho con el valor propio $\lambda = 0$. Al coordinar el proceso anterior con el de solución del sistema homogéneo, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, podrán mostrar si han construido la solución de un sistema con dos grados de libertad y la coordinación del proceso solución con el de vectores propios. Se espera también que los alumnos con una concepción acción no puedan resolver esta actividad sin realizar explícitamente los cálculos.

Escribe una matriz que tenga como valor propio al cero, es decir, $\lambda = 0$*.*

Se espera que los alumnos que muestran una concepción acción no puedan contestar esta pregunta. Los alumnos con una concepción proceso pueden utilizar la coordinación entre el proceso correspondiente al conjunto solución de un sistema de ecuaciones y el relacionado con la dependencia lineal de las columnas de la matriz. Los alumnos que tienen una concepción objeto serán capaces de relacionar los distintos procesos relacionados con la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la definición del valor propio (columnas linealmente dependientes, determinante igual a cero, solución múltiple, matriz no invertible, etc.) para encontrar la matriz *A* que se pide.

RESULTADOS

Se presentan los resultados de esta investigación mediante evidencia del análisis del trabajo de los alumnos obtenida tanto de las actividades en clase, como de los instrumentos de investigación. La descripción de los resultados se centra en las diferencias registradas en los alumnos que mostraron distintas construcciones y en la explicación de las dificultades encontradas, todo ello en términos de la teoría APOE.

Como se mencionó, el trabajo se realizó durante varios semestres pero el trabajo en cada uno de ellos y los resultados fueron muy similares, por ello los resultados descritos en este artículo incluyen la información de todos ellos. Los números que se presentan corresponden al promedio de los alumnos por semestre.

CONSTRUCCIONES PREVIAS

La descomposición genética diseñada supone, como conceptos previos para la construcción, de los conceptos de valores, vectores y espacios propios, la construcción, entre otros, de los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, espacio nulo de una matriz y conjunto generador de un espacio vectorial como procesos. Los resultados mostraron que tres alumnos en promedio cada semestre no los habían construido y que esto parecía ser responsable de sus dificultades en el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios. Las dificultades de estos alumnos se manifestaron en distintos momentos durante la investigación, incluyendo la entrevista en la que se les presentaron preguntas en contextos distintos al de valores y vectores propios, pero en todos los casos, los resultados demostraron que, en el mejor de los casos, construyeron una concepción acción de los conceptos de interés.

Dos de estos alumnos mostraron no haber construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones como proceso. El otro no dio evidencia de haber construido los conceptos de conjunto generador y el espacio nulo de una matriz más allá de una concepción acción.

Por ejemplo, cuando se le pregunta a Rafael (Sem. 1-2012) que encuentre los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, encuentra el valor propio, $\lambda = 4$. Utiliza este valor propio para encontrar los vectores propios y resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ (figura 2). Al obtener con este procedimiento la matriz cero concluye que la solución es el vector propio cero y comenta: *"dado que $\bar{v} = \bar{0}$ entonces $\lambda = 4$ no es valor propio"*. Se observa que Rafael no es capaz de interpretar la matriz aumentada del proceso de solución del sistema, lo que indica que no ha construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones como un proceso y que esto le impide relacionar dicha solución con el concepto de vector propio. Se observa que ha memorizado el procedimiento para encontrar los valores propios, pero que no ha comprendido este concepto, pues su interpretación errónea del sistema homogéneo le lleva a concluir que el valor propio que encontró no es realmente tal.

De sus respuestas a este, y otros problemas, se determinó que Rafael no ha construido siquiera una concepción acción de los conceptos de valor ni de vector propio de una matriz.

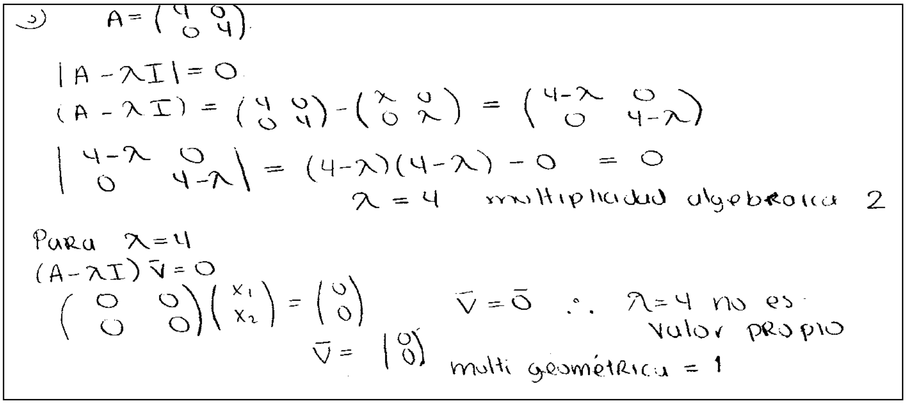


Figura 2

Cuando se le pregunta a Alberto (Sem. 2-2012) que encuentre los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, encuentra, mediante un procedimiento memorizado, dos vectores, pero uno de ellos es el vector cero (figura 3). Construye un

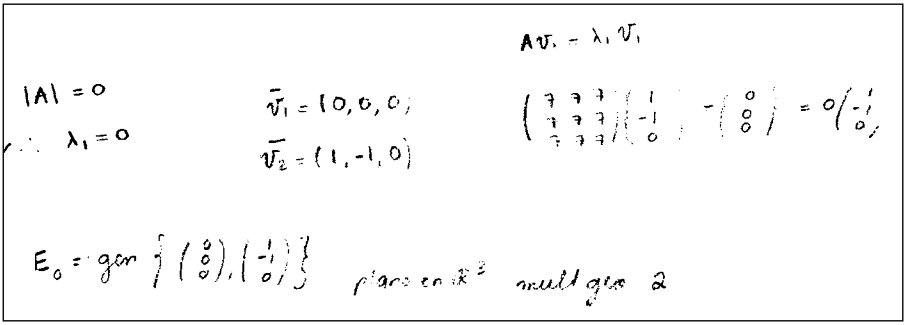


Figura 3

conjunto con estos vectores y concluye: *"son dos vectores, generan un plano"*. Al igual que Rafael, Alberto interpreta incorrectamente la solución del sistema de ecuaciones, no reflexiona sobre la imposibilidad de que el vector cero sea un vector propio asociado a la matriz *A*, y muestra claramente que no ha construido el concepto de espacio generado pues responde de memoria, sin considerar que su respuesta sea compatible con el conjunto generador que ha encontrado.

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que los alumnos que no han construido los conceptos previos no pueden hacer casi ninguna construcción prevista en la descomposición genética. La interpretación del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales resulta indispensable en la construcción del concepto de vector propio, por lo que muestran cuando mucho una concepción acción de dicho concepto. La construcción del concepto de conjunto generador resulta además indispensable en la construcción del espacio propio de una matriz como un proceso.

Alumnos que muestran una concepción acción de valores, vectores y espacios propios

Los alumnos que muestran este tipo de concepción reconocen que si $A\bar{v} \parallel \bar{v}$ entonces $\bar{v}$ es vector propio de A y si $A\bar{v} \nparallel \bar{v}$ entonces no es vector propio de A. Conocen las acciones a realizar para encontrar valores, vectores y espacios propios pero las realizan siguiendo un procedimiento memorizado. Reconocen los valores y vectores propios en forma geométrica y algebraica; sin embargo, la no interiorización de sus acciones, particularmente aquellas que se refieren al uso memorizado del procedimiento de búsqueda de los valores y vectores propios, se manifiesta de diferentes maneras. Por ejemplo: consideran que el vector cero puede ser un vector propio de una matriz; cuando cometen un error no lo reconocen aun en casos en que obtienen resultados contradictorios; son incapaces de reconocer si un valor o un vector dado son valores o vectores propios de una matriz sin recurrir a la solución de la ecuación característica; no relacionan el máximo número de vectores propios con el tamaño de una matriz; no establecen relaciones con otros conceptos del Álgebra Lineal como el espacio nulo, la independencia lineal de las columnas de la matriz *A* y tienen dificultades al encontrar el espacio propio correspondiente a un valor propio.

Un resultado interesante durante la entrevista fue notar que algunos alumnos de este grupo no recordaban la definición algebraica de los vectores propios, pero pudieron reconocerlos en la representación gráfica, lo cual les ayudó a reformular la definición de valores y vectores propios verbalmente. Al parecer, estos alumnos han construido una relación entre los procesos correspondientes a la interpretación algebraica y geométrica, pero se considera que muestran una concepción acción pues, aunque esta respuesta pareciera evidenciar una concepción proceso de valores propios, en sus demás respuestas no son capaces de utilizar estos conceptos más que de manera memorizada.

A continuación se presentan las respuestas de algunos alumnos que muestran una concepción acción y que ilustran claramente algunas de las dificultades antes mencionadas.

Cuando se pide a Silvia (Sem. 2-2011) que encuentre los valores, vectores y espacios propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, hace las acciones necesarias para encontrar los valores y los vectores propios, pero al utilizar acciones memorizadas, no reconoce su error ni se percata de que el vector cero no puede ser un

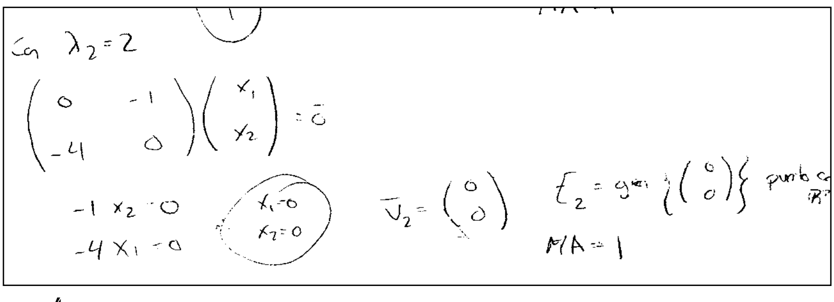


Figura 4

vector propio de una matriz. Explica: *"Como el vector propio es el vector cero no genera nada y se queda en el mismo punto"* (figura 4).

Por su parte, Pedro (Sem. 2-2012) dibuja la gráfica de los vectores $\bar{v}$ y $A\bar{v}$ (figura 5). Aclara que $\bar{v}$ es vector propio, encuentra el valor propio correspondiente y a partir de ahí escribe la definición de valor y vector propio que no había recordado anteriormente, utiliza las letras q y λ para el valor propio y explica: *"$\bar{v}$ es vector propio de la matriz A si* $q\bar{v} = A\bar{v}$*"*.

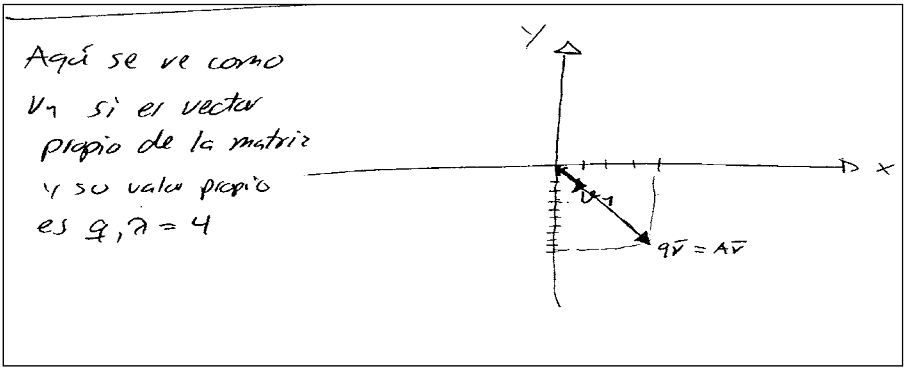


Figura 5

Al preguntarle sobre el número de vectores propios que una matriz dada puede tener, sin resolver la ecuación característica, Gloria (Sem. 2-2012) muestra incertidumbre y responde: *"No sé, ... sin hacer el determinante, no... pero el tamaño de la matriz no tiene relación con el número de valores propios"*. Más adelante, al enfrentar en la entrevista una matriz con columnas linealmente dependientes, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ responde incorrectamente y sin reflexionar *"no es posible encontrar el valor propio"* y más adelante *"el valor propio es uno con multiplicidad geométrica tres, porque los vectores tienen tres componentes y, además, puedo dar los vectores que quiera y generan un plano"*.

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 16 \end{pmatrix}$ cuyas columnas son linealmente dependientes, Ricardo (Sem. 1-2013) no puede encontrar un valor propio sin hacer las acciones que corresponden a los cálculos para hallarlos y explica: *"...es dos* *porque es el número que multiplica a las columnas de A".* Ante la pregunta en la entrevista en que se pedía que encontraran una matriz que tuviera como un valor propio al cero, es decir $\lambda = 0$, Ricardo, como la mayoría de los alumnos que tienen una concepción acción, no responde de inicio, pero después propone una matriz cualquiera y utiliza únicamente acciones memorizadas para encontrar los valores propios, al proponer varias matrices (tres en este caso) y no encontrar un valor propio igual a cero comenta: *"No sale... es muy difícil atinarle a una matriz para que salga el cero".*

En conclusión, en los diferentes semestres se registró un promedio de siete alumnos que mostraron una concepción acción; es decir, que siguen procedimientos memorizados y no muestran más que en algunas respuestas esporádicas, la interiorización de estas acciones en algún proceso.

Alumnos que muestran una concepción proceso de valores, vectores y espacios propios

Todos los alumnos con una concepción proceso mostraron evidencia de haber construido los conceptos previos requeridos y distintas evidencias de haber interiorizado las acciones en los procesos descritos en la descomposición genética. No solamente resuelven un mayor número de preguntas, sino que sus explicaciones muestran que son capaces de explicar y generalizar sus procedimientos, además de encontrar las condiciones que deben cumplirse para que un valor y un vector sean efectivamente tales para una matriz dada.

En particular, todos ellos reconocen de forma inmediata el paralelismo de los vectores $A\bar{v}$ y $\bar{v}$ para cualquier espacio R^n, sin necesidad de hacer cálculos, lo que muestra claramente interiorización de acciones; en los casos en que los vectores están en R^2 o R^3 algunos de estos alumnos dibujan los vectores para ejemplificar su paralelismo y reconocen que el valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector $\bar{v}$ mostrando coordinación entre los procesos correspondientes a la interpretación gráfica y analítica de los conceptos en estudio. Todos estos alumnos son capaces de explicar el producto de una matriz por un vector como la transformación de un vector en uno paralelo a sí mismo e identifican el signo del valor propio con la dirección del vector resultante lo que demuestra la coordinación de los procesos involucrados en la definición de los valores y vectores propios. Estos alumnos coordinan el proceso solución del sistema homogéneo asociado a la búsqueda de los valores y vectores propios con el proceso de encontrar el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema; relacionan los conceptos de valor y vector propio con otros conceptos del curso, mostrando así la construcción de coordinaciones entre distintos procesos descritos en la descomposición genética.

A pesar de haber interiorizado los procesos de identificación y búsqueda de valores propios, estos alumnos tienen dificultades al enfrentar problemas que incluyen una matriz A con componentes reales que tiene como valores propios números complejos y muestran evidencias de que no necesariamente han construido un proceso relacionado a la noción de espacio propio. Muchos de ellos muestran dificultades para encontrar o interpretar el espacio generado por los vectores propios asociados a un valor propio cuando la multiplicidad algebraica del valor propio es mayor que uno, tanto en el caso en que se le asocia únicamente un vector propio como en el caso en que se le asocian dos o más vectores propios. En estos casos recurren a respuestas memorizadas, como por ejemplo, que un solo vector genera una recta y dos vectores un plano, mostrando que no han interiorizado las acciones asociadas al concepto de espacio propio en procesos.

A continuación se presentan ejemplos de respuestas de los alumnos que ilustran estas construcciones y las dificultades encontradas.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ y el vector $\bar{v}_1 = (1, -2)$, Arturo (Sem. 2-2013) aclara: "$\bar{v}_1$ *es un vector propio de la matriz porque los vectores* $A\bar{v}_1$ y $\bar{v}_1$ *son paralelos, además, el valor propio hace más grande el vector* $\bar{v}_1$ *por 4 veces*". Posteriormente escribe su respuesta y dibuja los dos vectores a los que se refiere (figura 6).

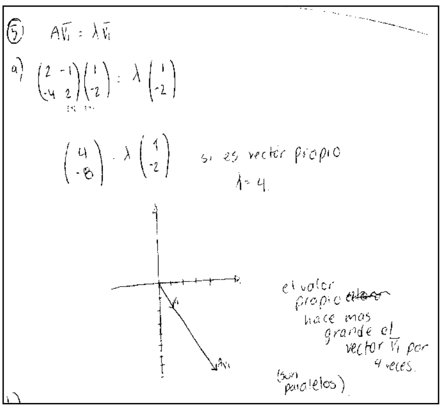


Figura 6

Ante un problema, similar, Paula (Sem. 1-2013) afirma: *"Sí es un vector propio y corresponde a $\lambda = 4$, los vectores que se obtienen son paralelos, son linealmente dependientes. En este caso el vector $A\bar{v}$ es cuatro veces más grande que el vector $\bar{v}$".* Más adelante añade: *"λ es un escalar que hace más grande al vector $\bar{v}$, pero lo deja en la misma dirección. Estos vectores son linealmente dependientes, son múltiplos y son combinación lineal"*, refiriéndose a que el vector $A\bar{v}$ puede escribirse como múltiplo de $\bar{v}$. Mientras que, en el caso del otro vector dado, $\bar{v} = (2, -3)$, explica: "*No es vector propio, no son paralelos y son linealmente independientes*", refiriéndose a los vectores $A\bar{v}$ y $\bar{v}$. También hace una gráfica para enfatizar su conclusión (figura 7). Sus respuestas dan evidencia de la interiorización de las acciones necesarias para determinar cuándo un vector es o no un vector propio de una matriz y las acciones correspondientes a la relación entre la representación algebraica y geométrica de los valores y los vectores propios de una matriz. Además, de que ha construido la coordinación de estos procesos con los de otros temas del curso y con el proceso correspondiente al espacio nulo de una matriz: "*Cuando encontramos los vectores propios estamos resolviendo el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, o sea, el espacio nulo de la matriz $(A - \lambda I)$".* Más adelante, refiriéndose a dicha matriz, $(A - \lambda I)$, comenta: *"Además, sé que un valor propio es cero cuando las columnas de esta matriz son linealmente dependientes. También... si su determinante es cero es cuando λ es un valor propio".*

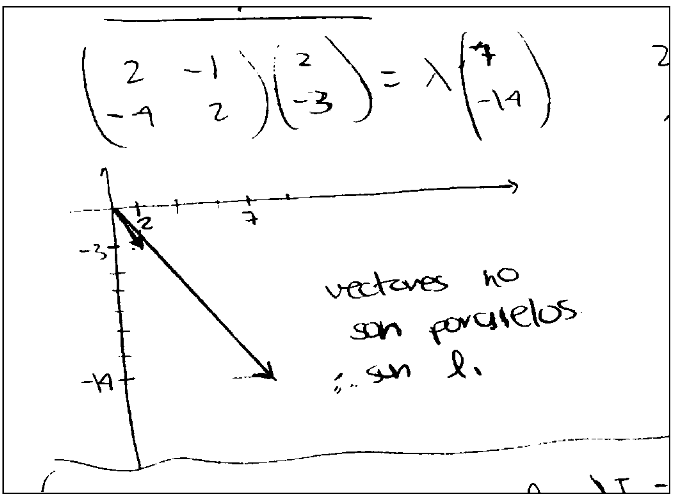


Figura 7

El trabajo de Ernesto (Sem. 1-2013) muestra la forma en que estos alumnos son capaces de relacionar los conceptos de vector y valor propio de una matriz con otros conceptos del curso. Al pedirle que encontrara una matriz que tuviera al cero como valor propio responde: "*Si el valor propio es cero, al usarlo en el determinante de la ecuación característica, debe ser igual a cero. El determinante se reduce al determinante de la matriz A igual a cero... eso te dice que la matriz no es invertible, o sea, si uso el 'teorema resumen' la matriz tiene columnas linealmente dependientes, así que cualquier matriz que cumpla esto tendrá un valor propio cero*".

El trabajo de Ernesto muestra también las dificultades encontradas por este grupo de alumnos. Durante la entrevista explica: "*Los valores propios de esta matriz pertenecen a los complejos, son conjugados...los vectores propios también tienen componentes complejas...pero no sé cómo resolver el sistema cuando tengo números imaginarios... y me cuesta trabajo imaginarme cómo son...*". Ernesto pone en evidencia cómo estos alumnos generalizan sin problema la definición a esta situación, pero tienen dificultades con las acciones correspondientes al trabajo con números complejos, probablemente porque que han tenido muy poco contacto con el álgebra de este tipo de números.

El trabajo de Laura (Sem. 2-2011) en la entrevista nos permite ilustrar las dificultades de estos alumnos en la construcción del concepto de espacio propio. Laura encuentra sin problema los valores y vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, incluyendo su multiplicidad algebraica (figura 8). Al comentar su trabajo explica

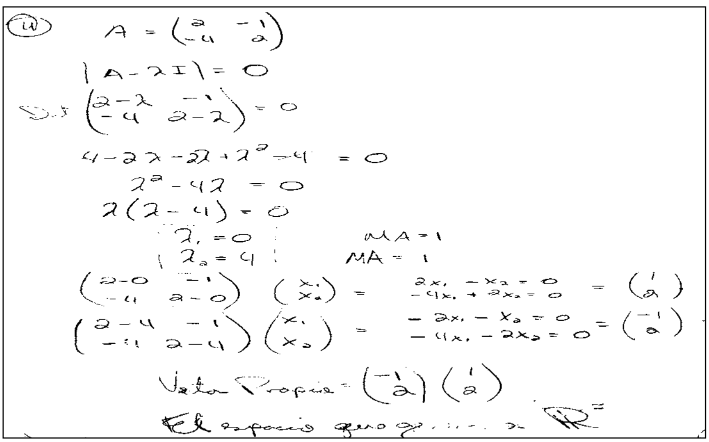


Figura 8

claramente que cada valor propio tiene su vector propio asociado, sin embargo, al buscar el espacio propio considera que es el espacio generado por los vectores propios correspondientes a los distintos valores propios. Dice: *"El espacio propio es generado por todos los vectores propios encontrados. Tengo dos vectores en R^2, por lo tanto genera R^2"* mostrando una concepción acción de espacios propios.

Durante su trabajo en clase Andrea (Sem. 1-2012) afirma: *"...a cada valor propio le corresponde un vector propio siempre"* y escribe su respuesta a la pregunta que relaciona el número de valores propios con el tamaño de una matriz, en este caso $A_{4\times 4}$ (figura 9).

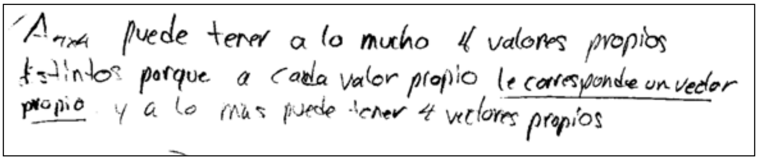


Figura 9

Por su parte, al considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, Julio (Sem. 2-2013) concluye: "$\lambda = 0$ *porque las columnas de la matriz son linealmente dependientes"* y al escribirlo lo justifica como un "*enunciado del 'teorema resumen' del Álgebra Lineal"* (figura 10). Julio no ha construido la coordinación del proceso de solución del sistema asociado a la definición de los valores y vectores propios con el correspondiente al número de vectores propios asociados que da como resul-

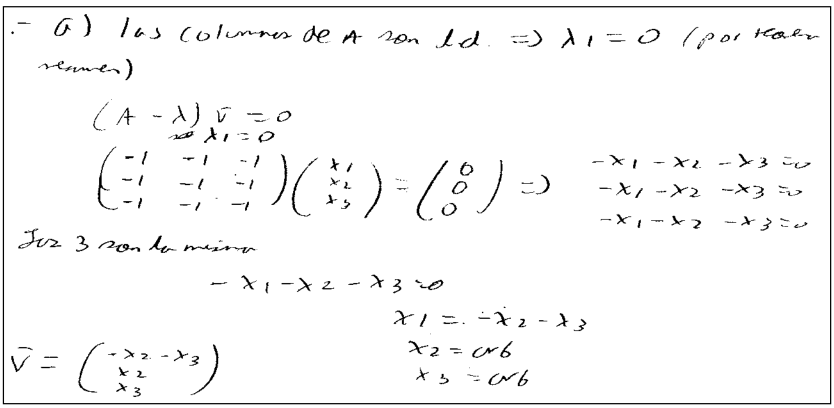


Figura 10

tado el proceso de espacio propio. Comenta: *"...para este valor propio tengo dos variables arbitrarias, ¿doy dos valores?"* Escribe el conjunto solución en términos de la combinación lineal de dos vectores, pero no puede encontrar el espacio propio correspondiente porque se le presenta una confusión: "*Dos vectores generan un plano, pero cada valor propio tiene un vector propio, una familia... no me equivoqué, pero no sé cómo explicar esto*".

En promedio, en cada uno de los diferentes semestres hubo veintiún alumnos que mostraron una concepción proceso, lo que evidencia la efectividad de la secuencia didáctica utilizada.

Alumnos que muestran una concepción objeto de valores, vectores y espacios propios

En cada semestre se encontró, en promedio, tres alumnos que mostraron haber construido una concepción objeto de los conceptos en estudio. Estos alumnos evidencian todas las construcciones mencionadas para los alumnos cuya concepción es proceso. Además, son capaces de trabajar con los valores, vectores y espacios propios como una entidad, independientemente de que los valores propios sean reales o complejos; pueden identificar la necesidad de usar vectores propios en las aplicaciones y explican con claridad las propiedades de los vectores propios, por ejemplo, su relación con la posibilidad de diagonalizar una matriz y con la definición de matrices semejantes. Todo ello muestra que han encapsulado los procesos de valor y vector propio en objetos. La encapsulación del concepto de espacio propio se pone en evidencia cuando estos alumnos pueden hacer acciones sobre el espacio propio, por ejemplo para comparar espacios propios correspondientes a distintos valores propios y para determinar sus propiedades, como por ejemplo, su dimensión. Algunos ejemplos permiten ilustrar las construcciones antes mencionadas.

En el trabajo de Ángel (Sem. 1-2013) con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (figura 11) es posible observar que indica que los vectores y espacios propios corresponden a un valor propio y encuentra la multiplicidad geométrica. Describe claramente el espacio propio asociado a cada valor propio. Más adelante, cuando explica su trabajo comenta: *"Al sustituir los valores propios en el sistema homogéneo* $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ *estamos resolviendo el espacio nulo. La solución será múltiple porque* $\bar{v} \neq \bar{0}$*. Cada valor propio tiene sus vectores y espacio propio asociados*".

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad [(2-\lambda)(2-\lambda)] - 4 = 0$

$4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$ Polinomio característico

$\lambda(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad ma = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad ma = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad 2x_1 - x_2 = 0$ $\quad x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2x_1 = x_2$

$x_1 = 1/2\, x_2$

$x_2 = arb$

Vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E_0 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad mg = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad -2x_1 - x_2 = 0$ $\quad x_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2x_1 = -x_2$

$x_1 = -1/2\, x_2$

$x_2 = arb$

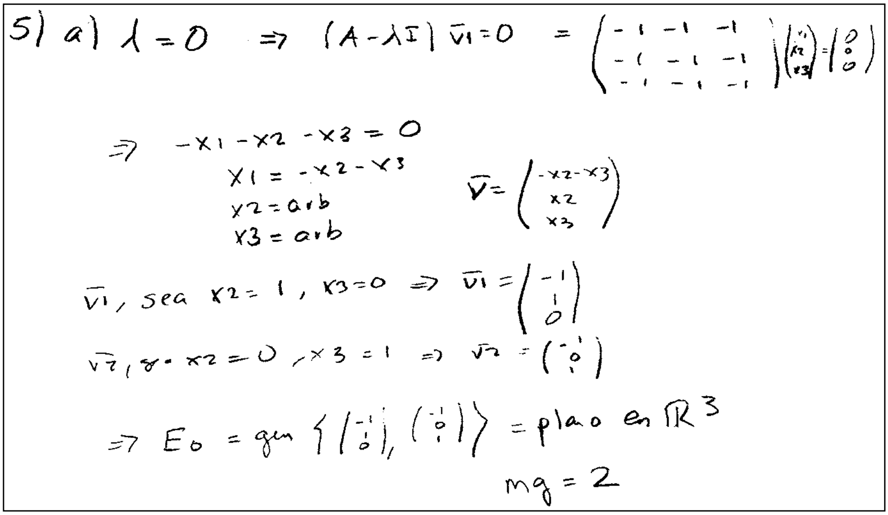
Vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 4$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E_4 = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad mg = 1$

Figura 11

Posteriormente aclara: "*E_0 es una línea recta que pasa por el origen y va en la dirección del vector (1, 2), su dimensión es uno. El espacio propio generado por el valor propio 4 es también una línea recta, pasa por el origen, pero su dirección está dada por el vector* (–1, 2). *Si pienso en las líneas rectas que representan a los espacios propios, son líneas que pasan por el origen pero cruzan por distintos cuadrantes*".

Al igual que Ángel, Claudia (Sem. 2-2013) responde sin problemas todo lo que se le pregunta dando explicaciones muy claras y coherentes. En el caso de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a la que nos hemos referido antes, encuentra el valor propio $\lambda = 0$, los vectores propios y el espacio propio asociados a dicho valor propio (figura 12).



5) a) $\lambda = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{v}_1 = 0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 - x_3$

$x_2 = arb$ $\quad \bar{V} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x_3 = arb$

$\bar{v}_1$, sea $x_2 = 1$, $x_3 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_2$, s. $x_2 = 0$, $x_3 = 1 \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{plano en } \mathbb{R}^3$

$mg = 2$

Figura 12

Al considerar el número de valores propios que puede tener una matriz responde: "*...cuando mucho n si la multiplicidad algebraica de todos es uno, cuando es mayor que uno disminuye el número de valores propios pero no necesariamente el de los vectores propios asociados a ellos, porque si la multiplicidad geométrica es mayor que uno pueden generar un espacio propio de dimensión más grande, un plano o un hiperplano u otro espacio*".

Al trabajar con una matriz $A_{2\times2}$, que tiene valores propios complejos, afirma: "*...los valores propios son uno conjugado del otro, son complejos* $\lambda = i$ *y* $\lambda = -i$*. Los vectores propios... encontramos el espacio nulo de la matriz* $A - \lambda I$*, son el* $(1, -i)$ *y el* $(1, i)$*. Los valores propios se pueden representar en un plano que tiene en el eje horizontal la parte real y en el vertical la imaginaria pero ya con los vectores propios no me lo puedo imaginar gráficamente... Creo que eso no lo vimos*".

Cuando se le pide encontrar una matriz que tenga como valor propio al cero, $\lambda = 0$, es capaz de relacionar la dependencia lineal de las columnas de la matriz $(A - \lambda I)$ con la posibilidad de que la matriz A tenga un valor propio igual a cero: "*...la matriz* $A - \lambda I$ *debe tener determinante igual a cero, por eso tiene solución múltiple y no tiene inversa. Si no fuera así tendría que tener un vector propio que fuera cero y eso no se puede... Bueno, pues por el 'teorema resumen' cualquier matriz que tenga columnas ld cumple con que tiene una* $\lambda = 0$" y da un ejemplo de una matriz $A_{5\times5}$ que tiene columnas que son todas múltiplo de la primera.

En conclusión, la estrategia didáctica seguida permitió que, en promedio, cada semestre tres alumnos construyeran una concepción objeto de los conceptos de valor, vector y espacio propio, lo cual proporciona, nuevamente evidencia de que la estrategia didáctica resultó efectiva en cada uno de los semestres investigados en este estudio. Además, estos alumnos parecen haber construido relaciones entre estos conceptos y otros conceptos del curso, es decir muestran haber construido un esquema coherente para los conceptos de interés, dado que reconocen aquellos problemas en los que son pertinentes, como por ejemplo los procesos de Markov. La construcción del esquema no se estudió a profundidad en esta investigación por lo que no es posible profundizar en este aspecto del aprendizaje.

DISCUSIÓN

En esta investigación se puso de manifiesto que la construcción de los conceptos previos considerados en la descomposición genética es indispensable en un aprendizaje de los conceptos de valores, vectores y espacios propios que vaya más allá de la memorización de los algoritmos involucrados en su cálculo. Un aprendizaje de tipo acción de los sistemas de ecuaciones y de su conjunto solución, además de las nociones de conjunto generador y espacio generado inhibe la interiorización de las acciones necesarias en la construcción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Si bien en la experiencia que aquí se reporta, los alumnos con esta dificultad fueron pocos, esta contribución es importante de tomar en consideración en los cursos de Álgebra Lineal.

Los datos de este estudio, como se hace notar en el análisis de resultados, muestran evidencias de las construcciones propuestas en la descomposición genética. Esto permite, por una parte validarla y por otra considerarla como un buen modelo para predecir las construcciones necesarias para el aprendizaje de estos conceptos. De esta manera, la descomposición genética propuesta puede ser empleada por otros investigadores y también por profesores en la planeación didáctica de actividades relacionadas con estos importantes conceptos.

El concepto que presentó mayor dificultad a los alumnos fue el de espacio propio, en particular en el caso en que la multiplicidad geométrica era mayor a uno. Esta dificultad puede explicarse por la posible falta de coordinación del espacio nulo de la matriz $(A - \lambda I)$ con el proceso de espacio generado por los vectores propios asociados a un valor propio; aunque es necesario hacer más investigación al respecto.

Las construcciones anteriores parecen ser indispensables en la construcción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Con ello se da respuesta a la primera pregunta de investigación planteada en este estudio.

En cuanto al diseño didáctico, la evolución de los alumnos en la parte del curso relacionada con la enseñanza de los valores, vectores y espacios propios siguiendo el ciclo de enseñanza de la teoría APOE y utilizando actividades diseñadas con base en la descomposición genética propuesta mostró ser satisfactoria. Las consideraciones siguientes permiten avalar esta aseveración y permiten dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

La literatura concerniente al aprendizaje de las matemáticas avanzadas en general, y del Álgebra Lineal en particular, señala que la construcción de una concepción objeto es difícil de lograr en el tiempo destinado a un curso universitario (Asiala *et al.*, 1998; Arnon *et al.*, 2014; Clark *et al.*, 2007; Trigueros y Martínez-Planell, 2010; Sfard, 1991). En el caso del curso que se reporta se encontraron, en promedio, al menos tres alumnos, que construyeron una concepción objeto de los conceptos de interés y que una mayoría de los alumnos construyó una concepción proceso. Estos resultados ponen de manifiesto que es posible superar las dificultades mencionadas en la literatura en relación al aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios.

La poca investigación reportada respecto al aprendizaje de los conceptos de interés en esta investigación, señala la dificultad de los alumnos de relacionar su representación geométrica con la algebraica (Stewart y Thomas, 2007; Gol, 2012). Una aportación del diseño teórico y didáctico utilizado en esta investigación consiste en lograr que la mayoría de los alumnos en los distintos semestres no mostraran esta dificultad. Ello como resultado del diseño de actividades que les permitieron construir esa relación y trabajar flexiblemente con ambas representaciones en la solución de los problemas planteados en los instrumentos de investigación.

Otro logro del diseño didáctico de esta investigación consiste en que las actividades diseñadas permitieron a todos los alumnos reconocer que, en la definición de los valores y vectores propios, ambos lados de la ecuación, $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, representan un vector. Con esto se logró superar la dificultad reportada en la literatura (Stewart y Thomas 2007).

Es importante mencionar que los conceptos de valores, vectores y espacios propios han sido estudiados únicamente en el caso en que los valores propios son reales y los vectores propios se encuentran en un espacio vectorial real. En este estudio se avanza la investigación al considerar el problema de la construcción de estos conceptos de manera global, por lo que se incluyó en la enseñanza el caso de los valores, vectores y espacios propios complejos. En este ámbito se encontró que los alumnos desconocen el álgebra con números complejos, por lo que se considera que es necesario diseñar actividades en este sentido que preparen a los alumnos al trabajo con este tipo de valores, vectores y espacios propios.

CONCLUSIÓN

Los conceptos de valores, vectores y espacios propios asociados a una matriz son considerados por profesores y por investigadores entre los más abstractos del Álgebra Lineal (Larson *et al.*, 2007; Sierpinska, 2000; Possani *et al.*, 2010). Al mismo tiempo se consideran muy relevantes por sus múltiples aplicaciones y por ello se incluyen en casi todos los planes de estudio. Por su parte, los alumnos presentan muchas dificultades y su aprendizaje, además de ser superficial, suele restringirse al uso de algoritmos memorizados (Thomas y Stewart, 2011). Los resultados de esta investigación proporcionan evidencias que muestran que cuando se diseña una estrategia didáctica basada en una teoría de la Educación Matemática, es posible superar las dificultades encontradas en otras investigaciones y se discute, además, cuáles son las causas de algunas de las dificultades encontradas. Los resultados permiten concluir que sí es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se favorezcan las construcciones necesarias en el aprendizaje de estos conceptos mediante actividades diseñadas con la teoría APOE.

Los datos de este trabajo ponen de manifiesto que la descomposición genética propuesta mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones necesarias para el aprendizaje de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Con ello se da respuesta a la primera pregunta de investigación al explicitar las construcciones que se consideran necesarias para el aprendizaje de los conceptos estudiados.

Esta investigación pone de manifiesto, además, que mediante un modelo basado en la teoría APOE de la construcción de estos conceptos y el diseño de actividades a partir de él es posible lograr que los alumnos profundicen en la definición y el significado de los valores, vectores y espacios propios. Esto responde de manera afirmativa a la segunda pregunta de investigación pues el trabajo en las actividades favoreció la aparición de las construcciones necesarias para el aprendizaje de los conceptos estudiados. Además, los alumnos fueron capaces de relacionar estos conceptos con otros del Álgebra Lineal tales como matriz inversa, independencia lineal o espacio nulo de una matriz. La mayor parte de los alumnos participantes en esta experiencia no presentaron las dificultades reportadas en la literatura sobre el aprendizaje de estos conceptos, aunque sí las tuvieron cuando los valores propios son números complejos. Si bien se considera que este problema no invalida la descomposición genética, sí concluimos que es necesario trabajar más ampliamente en este caso y preparar a los alumnos mediante trabajo previo con el álgebra de los números complejos.

Las construcciones previas señaladas en la descomposición genética aparecieron en esta investigación como indispensables en la construcción de los conceptos estudiados en ella. Este resultado alerta a los profesores a comenzar la enseñanza de este tema del Álgebra Lineal brindando oportunidades a los alumnos para que los construyan.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C., el Instituto Tecnológico Autónomo de México y el Proyecto FONDECYT núm. 1140801, Chile.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa Fuentes, M. Trigueros y K. Weller (2014), *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education,* Nueva York, Springer.

Asiala, M., A. Brown, J. Kleiman, y D. Mathews (1998), "The development of students' understanding of permutations and symmetries", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 3, núm. 13-43.

Clark, J., G. Kraut, D. Mathews y J. Wimbish (2007), "The 'Fundamental Theorem' of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts". Recuperado el 22 de noviembre de 2014 de http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stat2c.pdf

Gol, S. (2012), "Dynamic geometric representation of eigenvector", en S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (eds.), *Proceedings of the 15th Annual*

Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Portland, Oregon, pp. 53-58.

Larson, C., C. Rasmussen, M. Zandieh, M. Smith y J. Nelipovich (2007), "Modeling perspectives in linear algebra: a look at eigen-thinking". Recuperado el 4 de marzo del 2014 de http://www.rume.org/crume2007/papers/larson-rasmussen-zandieh-smith-nelipovich.pdf.

Possani, E., M. Trigueros, G. Preciado y M.D. Lozano (2010), "Use of models in the Teaching of Linear Algebra", *Linear Algebra and its Applications*, vol. 432, núm. 8, pp. 2125-2140.

Sierpinska, A. (2000), "On some aspects of students' thinking in Linear Algebra", en J. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 209-246.

Sfard, A. (1991), "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, núm. 1, febrero, pp. 1-36.

Stewart, S. y M.O.J. Thomas (2007), "Eigenvalues and eigenvectors: Formal, symbolic, and embodied thinking", *The 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education,* San Diego, pp. 275-296.

Thomas, M.O.J. y S. Stewart (2011), "Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic and formal thinking", *Mathematics Education Research Journal*, vol. 23, núm. 3, septiembre, pp. 275-296.

Trigueros, M y R. Martínez-Planell (2010), "Geometrical representations in the learning of two-variable functions", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 73, núm. 1, pp. 3-19.

DATOS DE LAS AUTORAS

Hilda Salgado
Instituto Tecnológico Autónomo de México
famysusi@prodigy.net.mx

María Trigueros
Instituto Tecnológico Autónomo de México
mtrigueros@gmail.com

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas

Angelina G. González Peralta, Juan Gabriel Molina Zavaleta
y Mario Sánchez Aguilar

Resumen: En este manuscrito se reportan los resultados de una revisión de literatura relativa al uso de juegos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revisión se basa en las investigaciones de matemática educativa que han dirigido su atención al juego como un recurso didáctico. Para el desarrollo de la revisión de literatura se utilizan tres ejes conductores: 1) definiciones y clasificaciones de juego usadas en la literatura, 2) tipo de investigaciones que se han realizado sobre juegos, tipo de juegos estudiados y características de las muestras consideradas y 3) efectos sobre el uso de juegos que se reportan en los estudios considerados. Finalmente se discute acerca de los resultados, se señalan limitaciones del método y futuras líneas de investigación relativas a la inclusión de juegos en la educación matemática. La principal contribución de este artículo es proporcionar al lector una visión actualizada de las investigaciones relativas al uso de juegos dentro del marco de la educación matemática.

Palabras clave: actividades lúdicas, enseñanza de las matemáticas, juegos matemáticos, juegos educativos, educación matemática.

Mathematics never stops being a game: research on the effects of the use of games in the teaching of mathematics

Abstract: In this manuscript the results of a literature review on the use of games in the teaching and learning of mathematics are reported. The review is based on mathematics education research literature that pays attention to games as a mathematics teaching resource. For the development of the literature review three guiding questions were used: 1) definitions and classifications of games used in the literature, 2) type of research that has been done on games, types of

Fecha de recepción: 14 de noviembre de 2013; fecha de aceptación: 2 de octubre de 2014.

games studied, and characteristics of the samples considered, and 3) effects on the use of games reported in the studies considered in the review. Finally, the results of the review, the limitations of the method, and future topics of research concerning the inclusion of games in mathematics education are discussed. The main contribution of this manuscript is to provide the reader with an updated overview of the research on the use of games in the context of mathematics education.

Keywords: leisure activities, mathematics teaching, mathematical games, educational games, mathematical instruction.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este artículo es ofrecer un panorama general de la investigación sobre el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas, a través de una revisión de literatura especializada. El interés por estudiar investigaciones enfocadas en el uso de juegos en la clase de matemáticas surge tras un primer encuentro con la publicación del español Miguel de Guzmán, *Juegos matemáticos en la enseñanza* (1984). De Guzmán escribe sobre la relación del juego con la matemática y de la utilización de juegos en la enseñanza. El texto no solo señala el impacto de los juegos en la historia y las consecuencias para la didáctica de la matemática, sino que plasma las similitudes que surgen entre intentar resolver un problema matemático y procurar ganar un juego y sugiere que implementar juegos en la clase de matemáticas puede resultar provechoso para el logro de algunos objetivos de la enseñanza.

Surge entonces una pregunta básica que motiva la revisión bibliográfica que presentamos en este ensayo: ¿existen investigaciones empíricas que avalen estas ventajas o son solo visiones positivas de docentes y entusiastas que disfrutan de la denominada matemática recreativa?

Para dar respuesta a la anterior pregunta revisamos investigaciones empíricas que reportan algún tipo de efecto en los estudiantes al incorporar el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. La revisión se enfoca, principalmente, en tres grandes ejes:

1. Las definiciones y clasificaciones de juego que han sido utilizadas en trabajos relativos a la enseñanza y el aprendizaje.
2. Algunas investigaciones que se han realizado sobre el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas.

3. Efectos que reportan los investigadores al realizar estudios sobre la inclusión de juegos en la clase de matemáticas.

Finalmente, se presenta una discusión acerca de la información reportada y sus implicaciones para futuras investigaciones en el área. Esta información es relevante porque permite a los investigadores, interesados en esta área, ubicar sus propuestas de investigación o reconocer áreas de oportunidad para investigar; por otra parte, a los docentes interesados por el uso de juegos podría brindar un panorama sobre los alcances y limitaciones del uso de juegos en la enseñanza de la matemática.

MÉTODO

En esta sección del manuscrito se describe el método utilizado para llevar a cabo la revisión de literatura. La descripción está dividida en tres secciones: 1) ¿Dónde buscamos?, 2) ¿Qué buscamos? y 3) ¿Qué fue excluido de la revisión?

¿DÓNDE BUSCAMOS?

En un primer momento, la búsqueda de literatura se inició localizando investigaciones empíricas sobre juegos en las siguientes revistas internacionales especializadas en educación matemática: *Educational Studies in Mathematics, ZDM The International Journal of Mathematics Education, The Journal of Mathematical Behavior, Journal for Research in Mathematics Education, International Journal of Science and Mathematics Education, Educación Matemática* y *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Sin embargo, el número de artículos encontrados fue de nueve en total, por lo que en un segundo momento se amplió la búsqueda bibliográfica utilizando *Google* como apoyo.

La elección de *Google* se debió a que arroja resultados no solo de revistas de investigación y de bases de datos, sino también de revistas no incluidas en esas bases, tesis y artículos en memorias de congresos, entre otros. Esta amplitud de resultados que produce el motor de búsqueda *Google* ha hecho que sea utilizado como herramienta complementaria en búsquedas bibliográficas de nuestra disciplina (por ejemplo el método de búsqueda de Sotos *et al.*, 2007).

Otra fuente complementaria de información empleada en un tercer momento fue la opinión de colegas familiarizados con el uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. Algunas referencias incluidas aquí fueron recomendadas por estos colegas cuando revisaron una primera versión de este manuscrito.

Después de reunir los artículos localizados en los tres momentos antes descritos, se revisaron las listas de referencias bibliográficas de estos con la finalidad de encontrar más textos que pudieran ser incluidos en nuestra revisión.

¿Qué buscamos?

Los documentos que se incluyeron en la revisión bibliográfica debían cumplir con las siguientes condiciones. Primero, ya sea en el título, el resumen, las palabras clave o el cuerpo del artículo deberían aparecer las palabras clave *juego* y *matemáticas*, o alguna de las palabras clave relacionadas: juegos matemáticos, juegos en la clase de matemáticas, efectos de juegos matemáticos, investigación de juego matemático, *mathematical games, playing mathematical games, learning mathematics through games* y *research on mathematical games* (estas palabras también guiaron las búsquedas en *Google*). Se incluyeron artículos escritos en inglés y en español.

Segundo, con la intención de evitar opiniones personales, o no fundamentadas, se tomó la decisión de incluir solamente trabajos que pudieran clasificarse en alguna de estas cuatro categorías: 1) artículos publicados en una revista; 2) artículos publicados en memorias de eventos académicos como congresos, coloquios o escuelas; 3) libros y 4) tesis de grado.

Tercero, debido a que se tenía el interés de localizar trabajos que proporcionaran algún tipo de evidencia empírica sobre el efecto del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas, solo se incluyeron en la revisión: 1) investigaciones empíricas sobre juegos, 2) trabajos que reporten definiciones o clasificaciones de juego aplicables al contexto de enseñanza de las matemáticas y 3) trabajos que proporcionen argumentos o reporten efectos del uso de juegos como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, es importante mencionar que no se establecieron límites temporales, esto con la intención de producir una revisión bibliográfica actualizada, pero que también incluyera trabajos antiguos que permitan obtener un panorama más general de esta área de la educación matemática.

¿Qué fue excluido de la revisión?

Como se mencionó arriba, el interés se enfocó principalmente en investigaciones empíricas o trabajos que reportaran algún tipo de efecto posterior al uso de juegos para la enseñanza de las matemáticas; entonces, se excluyeron artículos que únicamente sugieren el uso de juegos o alguna propuesta didáctica particular basada en el uso de juegos, pero que no brindan evidencia sobre los efectos de su implementación.

También se descartaron estudios relativos al uso de videojuegos y juegos en línea puesto que el interés se dirigía a actividades lúdicas que no se vean limitadas por el acceso a equipo de cómputo y a Internet. Se dejaron fuera investigaciones del nivel preescolar y aquellas relativas al efecto de los juegos en la enseñanza y aprendizaje de disciplinas ajenas a las matemáticas, sin embargo, se han incluido referencias generales (no específicas de la educación matemática) que tienen una relación directa con el tema de interés, o bien aquellas que presentan definiciones de juego aun cuando no sea una definición específica para el área de matemáticas.

En busca de una definición y clasificación de juegos

El juego, al evolucionar a la par de la sociedad, ha adquirido connotaciones distintas. Brousseau (1997) presenta una muestra de la versatilidad del concepto e indica que "juego" puede referirse a actividades físicas o mentales que, para quien las lleva a cabo, no tienen otro objetivo que el placer que proveen. También se le llama "juego" a los instrumentos que se utilizan para jugar y, algunas veces, el "juego" es la forma en que uno juega, aunque al referirse a procedimientos es preferible utilizar el término táctica o estrategia. Refiriéndose a la definición de Lalande (1972), el juego es la organización de una actividad dentro de un sistema de reglas que definen un éxito y un fracaso. De acuerdo con la revisión bibliográfica se aprecia que desarrollar una taxonomía del juego no es una tarea sencilla, sobre todo por las diferentes connotaciones de la palabra *juego.* Al respecto, Gardner (1992) señala:

> La palabra "juego" fue usada por Ludwig Wittgenstein para ilustrar lo que denominaba una "palabra familia" que no puede ser dotada de una definición única. Tiene muchos significados que están unidos entre sí, un poco a la

> manera en que lo están los miembros de una familia humana, significados que han ido vinculando conforme el lenguaje ha evolucionado. Se puede definir "juegos matemáticos" o "matemáticas recreativas" diciendo que son cualquier tipo de matemáticas con un fuerte componente lúdico, pero esto es decir poco porque "juego", "recreación" y "lúdico" son casi sinónimos. (p. xiii, nuestra traducción).

La dificultad de proporcionar una definición universal sugiere que el educador o investigador deberá utilizar la definición que mejor se ajuste a los propósitos que se persiguen; sin embargo, en este artículo se incluyen dos definiciones que resultan pertinentes en el contexto de la matemática educativa: *juego instruccional* y *juego matemático*. Bright, Harvey y Wheeler (1985) puntualizan que un juego instruccional es aquel para el cual un conjunto de objetivos educativos, cognitivos o afectivos han sido determinados por quien planea la actividad. Por su parte Oldfield (1991a) proporciona una definición de juego matemático que contempla juegos individuales:

1. La actividad involucra:
    a) Un desafío contra una tarea o uno o más oponentes.
    b) O una tarea común que debe abordarse ya sea solo o, más comúnmente, en conjunción con otros.
2. La actividad se rige por un conjunto de reglas y tiene una estructura clara subyacente a las mismas.
3. La actividad normalmente tiene un final distinto.
4. La actividad tiene objetivos matemáticos y cognitivos específicos.

No solo se admiten diversas definiciones para el concepto de juego, también existe una variedad de clasificaciones; sin embargo, es pertinente incluir una de las más generales y difundidas que agrupa los juegos en dos grandes categorías: *juegos de conocimiento* y *juegos de estrategia*. En los juegos de conocimiento es necesario que el jugador utilice conceptos o algoritmos matemáticos; en estos juegos se distinguen tres niveles: pre-instruccional (familiarizan al alumno con un concepto), co-instruccional (se suman a las actividades de enseñanza) y post-instruccional (útiles para consolidar el aprendizaje). Por otra parte, los juegos de estrategia demandan poner en práctica habilidades, razonamientos o destrezas. Los juegos de estrategia se subdividen en solitarios y multipersonales, los bipersonales son un subconjunto de estos últimos (Gairín, 1990).

INVESTIGACIONES SOBRE JUEGOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

A finales de los años sesenta, las investigaciones formales acerca de juegos tienen un ávido crecimiento. Precursores notables de esta línea son Bright, Harvey y Wheeler, quienes en 1985 publican una monografía relativa al aprendizaje y juegos matemáticos: *Learning and mathematics games*. En ella puede apreciarse que, en las dos décadas previas a la publicación, se produce un importante crecimiento del número de estudios sobre juegos. Sin embargo, la monografía reporta también estudios de la primera mitad del siglo XX: Steinway (1918); Hoover (1921) y Wheeler y Wheeler (1940).

Bright, Harvey y Wheeler (1985) clasifican las investigaciones según el nivel instruccional (pre-instruccional, co-instruccional y post-instruccional). Ernest (1986) basado en tres objetivos de la enseñanza de las matemáticas (reforzar y practicar habilidades, adquirir conceptos y desarrollar estrategias de solución de problemas) clasifica los estudios sobre juegos de acuerdo a cómo ayudan a lograrlos y agrega un cuarto aspecto: el efecto motivacional de los juegos.

En cuanto a los tipos de juegos que se han estudiado, por mencionar algunos, existen trabajos específicos sobre juegos populares como el cubo mágico (Zarzar, 1982), el dominó (Oller y Muñoz, 2006), los rompecabezas de MacMahon (Hans, Muñoz y Fernández-Aliseda, 2010) o el sudoku (Babu *et al.,* 2010). Fernández (2008) estudia juegos inspirados en el ajedrez; Pintér (2010) propone desarrollar juegos basados en problemas matemáticos tradicionales; Shillor y Egan (1993) convierten una serie de tareas matemáticas en desafíos que los jugadores deben enfrentar por equipos; Morales, Muñoz y Oller (2009) describen juegos que se matematizan mediante grafos, en tanto Kamii y Joseph (2004) proponen juegos que permiten practicar sumas y restas. Bishop (1998) discute el papel de los juegos en la educación matemática y puntualiza:

> Los educadores en matemáticas han descubierto mediante su experiencia, que han apoyado con investigaciones teóricas, que jugar puede ser una parte integrante del aprendizaje. Esto ha hecho del acto de jugar y de la idea del juego una actividad de enseñanza y aprendizaje mucho más extendida de lo que había sido anteriormente (p. 21).

Sin embargo, pese al incremento de las investigaciones relativas al uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas, aún hace falta realizar más estudios experimentales sobre esta misma línea, ya que según la búsqueda de literatura realizada, localizamos pocas investigaciones de carácter empírico (un total de 18, véase anexo).

Es frecuente el interés hacia los efectos actitudinales del juego; sin embargo, existe una valiosa diversidad en los puntos focales de las investigaciones presentadas. El uso de estrategias de solución de problemas al intentar ganar un juego es de interés para Corbalán (1996) y Kraus (1982). Edo y Deulofeu (2006) estudian la construcción de conocimientos a través de juegos de mesa; mientras que Afari, Aldridge y Fraser (2012) investigan la efectividad del uso de juegos matemáticos al estilo de "Jeopardy", un juego en el que, tras elegir una categoría, se da la respuesta al concursante y este debe formular la pregunta. Por ejemplo, al escuchar "rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo" el concursante debería responder "¿qué es la trigonometría?".

Es importante resaltar que de los estudios empíricos realizados, una porción considerable se concentra en la educación básica (15 trabajos en básica respecto a 3 en el nivel superior, véase anexo). Las actividades lúdicas han sido poco contempladas en el nivel medio superior y superior. Para algunos, existe una clara línea divisoria entre la matemática "seria" y la matemática recreativa, línea completamente etérea para los amantes de las matemáticas. De Guzmán (1984) plantea:

> ¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde afuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas (p. 3).

Pero ¿por qué sumar juegos a la clase de matemáticas cuando hay tantos recursos? ¿Presentan alguna ventaja sobre las prácticas tradicionales? Como se ha hecho notar, investigadores y docentes han intentado responder estas preguntas, en el siguiente apartado se rescatarán argumentos relevantes acerca de la ventaja del uso de juegos en la educación matemática.

EFECTOS DEL USO DE JUEGOS EN EL AULA

Bright, Harvey y Wheeler (1985), basados en la escala de Bloom (1956), señalan que el nivel taxonómico de un juego se clasifica en seis niveles: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación. Con base en esto, los efectos de un juego pueden categorizarse. Ellos indican que pese a que los juegos en el nivel de conocimiento parecen ser los más utilizados en la enseñanza, en sus observaciones los resultados no fueron favorables. No obstante, esto puede deberse a la influencia de los conocimientos previos en este nivel taxonómico, aun cuando las actividades que se desarrollen no involucren juegos. En el nivel de comprensión, las actividades lúdicas resultaron efectivas, conduciendo al estudiante a niveles taxonómicos más sofisticados.

La difícil tarea de motivar a los estudiantes es una de las principales razones por las que se opta por incluir actividades recreativas en la educación. Para Ernest (1986) la motivación es la principal ventaja del uso de juegos porque los estudiantes se sumergen en las actividades y, después de un tiempo, mejoran sus actitudes en torno a la materia; también es una forma de dejar de lado la monotonía de la práctica y darle variedad a la enseñanza.

Oldfield (1991a), además de concordar con el papel motivacional del juego y destacar la emoción, participación y actitudes positivas que los maestros reportan, indica que los juegos son valiosos para fomentar habilidades sociales, estimular la discusión matemática, aprender conceptos, reforzar habilidades, comprender la simbología, desarrollar la comprensión y adquirir algunas estrategias de solución de problemas. En publicaciones sucesivas, el autor aborda con más detalle cada una de estas cuestiones (Oldfield, 1991b, 1991c, 1991d, 1992).

Gairín (2003) sugiere que los juegos de estrategia constituyen un recurso útil para iniciar a los estudiantes en demostraciones relativas a la matemática discreta, en tanto Van Oers (2010) discute las potencialidades de promover el pensamiento matemático en niños pequeños llevando las actividades del aula a un contexto de juego. Gairín y Fernández (2010), con base en lo publicado por el Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE, 1998), hablan de las ventajas e incluyen posibles inconvenientes: problemas organizativos, dificultades materiales, falta de conocimiento de los profesores respecto al juego y presión de los programas de estudio.

La heurística en la resolución de problemas matemáticos es particularmente importante para Kraus (1982), quien se cuestiona acerca del rol de esta cuando se intenta ganar un juego. Investiga los efectos cognitivos de juegos bipersonales de información perfecta (Davis, 1973) en el aprendizaje de las matemáticas y, tras haber demostrado que existe una relación entre la resolución de problemas y la práctica de algunos juegos relativos a las matemáticas, agrega que es necesario continuar las investigaciones con el propósito de incorporar efectivamente el uso de juegos en el aula. Respecto a los juegos de estrategia, Corbalán (1996) señala:

> Su utilidad dentro de la formación matemática es potencialmente muy grande, puesto que se trata de iniciar o desarrollar, a partir de la realización de ejemplos prácticos (no de la repetición de procedimientos hechos por otros) y atractivos, las destrezas específicas para la resolución de problemas y los modos típicos de pensar matemáticamente (p. 21).

También Butler (1988) reporta que el uso de juegos incrementa las habilidades de solución de problemas y motiva a los estudiantes, sin embargo, señala que la motivación puede durar solo durante la actividad y no trascender ni incrementar el interés del alumno por la materia. Enlista una serie de resultados, de los cuales se destacan los siguientes:

1. Los estudiantes generalmente adquieren, por lo menos, iguales conocimientos y habilidades intelectuales como lo harían en otras situaciones de aprendizaje.
2. La información es aprendida más rápidamente que con otras metodologías aunque la cantidad aprendida no es significativamente mayor que con otros métodos.
3. Los estudiantes de bajo rendimiento académico, comúnmente mejoran su desempeño a causa de un mayor interés.
4. Incrementa la tendencia de los alumnos a asistir regularmente a clases.
5. Los juegos tienen un gran impacto en el aprendizaje afectivo, promueven la socialización y pueden ser utilizados para evaluar valores, actitudes y comportamiento de los estudiantes.

Vankúš (2008) discute el potencial didáctico de los juegos y presenta ventajas similares a las ya reportadas con base en su experiencia y en aportaciones de diversos autores relativas al uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas (Randel *et al.*, 1992; Pulos y Sneider, 1994; Vankúš, 2005).

Las observaciones de los investigadores no solamente se dirigen a las actitudes y estrategias utilizadas por los jugadores sino que consideran otros aspectos, por ejemplo, determinar si jugar posibilita la adquisición de conocimientos o habilidades, si incrementa la participación, el trabajo colaborativo o el tiempo que el estudiante dedica a realizar una tarea.

Los resultados señalados hacen posible argumentar acerca de las ventajas del uso de juegos en la clase de matemáticas. A manera de síntesis se proponen cuatro grandes ejes que permiten categorizar la utilidad de la incorporación de juegos en la enseñanza. Con base en la clasificación de Ernest (1986), los cuatro ejes sugeridos son:

a) *Motivación, comportamiento y actitudes del estudiante.* La literatura indica un aumento en la motivación de los estudiantes y una mejoría en sus actitudes (Ernest, 1986; Oldfield, 1991a), además de reducir la ansiedad (Nisbet y Williams, 2009), ampliar el periodo de tiempo que el estudiante se enfoca en las actividades en el aula (Bragg, 2012b), promover la socialización e incrementar la tendencia a asistir a clases (Butler, 1988).
b) *Desarrollo de estrategias de solución de problemas.* El uso de juegos permite desarrollar estrategias como proponer y probar hipótesis, deducción por síntesis, deducción por análisis, ensayo y error, búsqueda de patrones, representaciones pictóricas entre otras. Kraus (1982), Oldfield (1991c) y Corbalán (1996) han identificado algunos juegos útiles para el desarrollo de estas y otras estrategias, por ejemplo: Nim, juegos basados en ajedrez o en patrones geométricos.
c) *Reforzamiento de habilidades.* El juego aporta en el desarrollo de habilidades de socialización, comunicación, argumentación y razonamiento lógico (Vankúš, 2008; Oldfield, 1991b, 1992), además de posibilitar el desarrollo de técnicas de demostración (Gairín, 2003).
d) *Construcción de conocimientos.* El progreso de los estudiantes es, al menos, igual que el de aquellos que no utilizan juegos (Butler, 1988); el juego posibilita que el nivel de conocimientos del alumno ascienda a niveles taxonómicos más avanzados (Bright, Harvey y Wheeler, 1985).

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

Al principio de la revisión bibliográfica se planteó la pregunta ¿existen investigaciones empíricas que avalen las ventajas del uso de juegos en la enseñanza de la matemática o son solo visiones positivas de docentes y entusiastas que disfrutan de la denominada matemática recreativa? La respuesta es que sí existen tales investigaciones; también se percibe entusiasmo por estas (no solo de profesores sino también de investigadores) y predominan las visiones positivas, si consideramos como un indicativo de ello que no encontramos investigaciones que trataran sobre efectos indeseados de la utilización de juegos en la enseñanza de la matemática.

Limitaciones del método

Aunque actualmente en educación matemática el inglés es el idioma principal en que se comunican las investigaciones en foros internacionales, una de las limitaciones que tiene el método usado es que solo consideró investigaciones en inglés y español, lo cual descarta estudios que pudieran existir en otros idiomas. Otra limitante fue utilizar solo el motor de búsqueda *Google* como herramienta complementaria (además de las herramientas de búsqueda que ofrecen las revistas elegidas), y no otros motores de búsqueda u otras bases de datos que seguramente arrojarían información diferente en cierto grado.

Futuras líneas de investigación

Los resultados de los trabajos revisados permiten sugerir algunas líneas de investigación. Se requieren investigaciones que abarquen periodos de tiempo amplios. Observaciones por periodos más largos podrían arrojar información acerca de si la motivación prevalece aun cuando el juego ha terminado, si el interés y las participaciones aparecen solo durante las actividades lúdicas o si la dinámica de clase en general evoluciona positivamente. Los trabajos de Garín (1990) y Garín y Fernández (2010) abarcaron un año de duración, periodo en el que se utilizaron distintos juegos, sin embargo faltó el registro sistemático de las aplicaciones para analizar la evolución de los estudiantes (véase anexo).

Son necesarios estudios de caso que determinen si el alumno es capaz de extrapolar las estrategias que utiliza para ganar una partida a el momento de resolver un problema y si existe una relación entre sus habilidades como jugador y su desempeño en la resolución de problemas.

Sería conveniente hacer estudios para determinar qué resultados sobre el uso de juegos en la enseñanza de la matemática son sólidos, que indiquen el uso de qué tipo de juegos propician la construcción de qué conocimientos pues son necesarias metodologías que disminuyan la incertidumbre en este aspecto.

Se requieren investigaciones del uso de juegos en los niveles medio superior y superior; si bien se sabe que las bases matemáticas se adquieren en los primeros años escolares, también es cierto que el conocimiento se construye de manera continua y las habilidades se desarrollan a lo largo de nuestra vida. Es necesario extender este tipo de investigaciones a niveles superiores y conocer los efectos en las habilidades, actitudes y capacidades de los jóvenes.

Estudios sobre efectos no deseables del uso de juegos en la enseñanza de la matemática. Resultó evidente la falta de investigaciones que reporten efectos negativos del uso de juegos, ya sea en las actitudes de los estudiantes, el aprovechamiento del tiempo en la sesión o en los resultados desfavorables en la construcción de conocimientos, e incluso que abunden en las dificultades o limitaciones para el docente; por ejemplo, Butler (1988) señala que la motivación puede durar solo durante la actividad y no trascender ni incrementar el interés del alumno por la materia. Realizar estudios que exploren los obstáculos y limitaciones del uso de juegos aporta información para determinar qué tan conveniente es incluir sesiones de juego en determinado escenario.

UNA REFLEXIÓN FINAL

Las anteriores líneas de investigación se desprendieron de la revisión bibliográfica; sin embargo, si consideramos al juego junto con los demás actores del sistema didáctico como el alumno, el profesor, el conocimiento, la institución, etc., por las distintas relaciones que puede haber entre ellos se podrían plantear varias líneas de investigación. Por ejemplo, considerando al estudiante y el conocimiento matemático se podría plantear un estudio que describa cómo se afecta la actitud de los estudiantes hacia el estudio en la clase de matemáticas si constantemente pierden un juego matemático o cómo se diseña un juego matemático para la enseñanza de cierto concepto. O considerando el juego matemático y el profesor, cuál es el rol del profesor en determinado juego matemático, o qué dificultades se presentan para el profesor en el uso de juegos en la clase de matemáticas.

Por otra parte la utilización de videojuegos y juegos en línea en la enseñanza de la matemática es un área que actualmente está teniendo un crecimiento rápido que habría que explorar.

Sin duda, existe potencial en la inclusión de actividades lúdicas en la enseñanza pero deben tomarse precauciones para que las sesiones de juego resulten útiles a los propósitos del plan de estudios. Es primordial que el docente asegure relación del juego con los objetivos que se persiguen, sin importar si se pretende enseñar un concepto o desarrollar estrategias y habilidades. Al respecto, Ernest (1986) puntualiza que para que los juegos tengan éxito como parte de las actividades matemáticas deben ser:

1) Seleccionados con base a los objetivos deseados.
2) Incorporados en el programa educativo.

Una planeación adecuada ayudará a prevenir, en la medida de lo posible, que la situación se salga de control y genere una desconexión entre el juego y la clase de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afari, E., J. Aldridge y B. Fraser (2012), "Effectiveness of using games in tertiary-level mathematics classrooms", *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 10, núm. 6, pp. 1369-1392.

Asplin, P., S. Frid y L. Sparrow (2006), "Game playing to develop mental computation: a case study", en P. Grootenboer, R. Zevenbergen y M. Chinnappan (eds.), *Identities, cultures, and learning spaces* (Proceedings of the 29th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Canberra), Adelaida, MERGA, pp. 46-53. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://www.merga.net.au/documents/RP12006.pdf

Babu, P., K. Pelckmans, P. Stoica y J. Li, (2010), "Linear systems, sparse solutions and Sudoku", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, núm. 1, pp. 40-42.

Bishop, A. (1998), "El papel de los juegos en educación matemática", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 18, pp. 9-19. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://dgespe.edutlixco.org/pdf/educa/pap_jueg.pdf

Bloom, B. (ed.) (1956), *Taxonomy of educational objectives, 1. Cognitive domain*, Nueva York, McKay.

Bragg, L. (2006), "Students' impressions of the value of games for the learning of mathematics", en J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková (eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the*

Psychology of Mathematics Education, Praga, Psychology of Mathematics Education, vol. 2, pp. 217-224. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://hdl.handle.net/10536/DRO/DU:30005948

——— (2007), "Students' conflicting attitudes towards games as a vehicle for learning mathematics: a methodological dilemma", *Mathematics Education Research Journal,* vol. 19, núm. 1, pp. 29-44.

——— (2012a), "Testing the effectiveness of mathematical games as a pedagogical tool for children's learning", *International Journal of Science and Mathematics Education,* vol. 10, núm. 6, pp. 1445-1467.

——— (2012b), "The effect of mathematical games on on-task behaviours in the primary classroom", *Mathematics Education Research Journal,* vol. 24, núm. 4, pp. 385-401.

Bright, G. (1980), "Game moves as they relate to strategy and knowledge", *The Journal of Experimental Education,* vol. 48, núm. 3, pp. 204-209.

Bright, G., J. Harvey y M. Wheeler (1979), "Using games to retrain skills with basic multiplication facts", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 10, núm. 2, pp. 103-110.

——— (1985), *Learning and mathematics games. Journal for research in mathematics education, Monograph number 1,* Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Brousseau, G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Butler, T. (1988), "Games and simulations: Creative educational alternatives", *TechTrends,* vol. 33, núm. 4, pp. 20-23.

CIDE (Centro de Investigación y Documentación Educativa) (1998), *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas,* Madrid, Centro de Publicaciones, Ministerio de Educación y Cultura.

Corbalán, F. (1996), "Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de problemas", *SUMA*, núm. 23, pp. 21-32. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://revistasuma.es/IMG/pdf/23/021-032.pdf

Davis, M. (1973), *Game theory: A nontechnical introduction,* Nueva York, Basic Books.

De Guzmán, M. (1984), "Juegos matemáticos en la enseñanza", en Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton (ed.), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* Santa Cruz de Tenerife, Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, pp. 49-85.

Edo, M. y J. Deulofeu (2006), "Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 24, núm. 2, pp. 257-268. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v24n2p257.pdf

Ernest, P. (1986), "Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school", *Mathematics in School*, vol. 15, núm. 1, pp. 2-5.

Fernández, J. (2008), "Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2º de primaria", tesis de doctorado no publicada, Universitat Autónoma de Barcelona, Facultat de Ciències de l'Educació, Departament de Pedagogía Aplicada. Barcelona. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://ddd.uab.cat/pub/tesis/2008/tdx-1215108-111407/jfa1de1.pdf

Gairín, J. (1990), "Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas" *Educar*, núm. 17, pp. 105-118. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17p105.pdf

——— (2003), "Aprender a demostrar: Los juegos de estrategia", en E. Palacián y J. Sancho (eds.), *Actas sobre las X Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*, Zaragoza, Instituto de Ciencias de la Educación, pp. 171-188. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_40/nr_456/a_6219/6219.pdf

Gairín, J. y J. Fernández (2010), "Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez" *Tendencias Pedagógicas*, vol. 15, núm. 1, pp. 57-90. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de www.tendenciaspedagogicas.com/Articulos/2010_15_03.pdf

Gardner, M. (1992), *Mathematical circus*, Washington, The Mathematical Association of America.

Hans, J., J. Muñoz y A. Fernández-Aliseda (2010), "MacMahon y las matemáticas en colores", *SUMA*, núm. 63, pp. 51-57.

Hoover, J. (1921), "Motivated drill work in third-grade arithmetic and silent reading", *Journal of Educational Research*, vol. 4, núm. 3, pp. 200-211.

Kamii, C. y L. L. Joseph (2004), *Young children continue to reinvent arithmetic, 2nd grade. Implications of Piaget's theory*, Nueva York, Teachers College Press.

Kraus, W. (1982), "The use of problem-solving heuristics in the playing of games involving mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 13, núm. 3, pp. 172-182.

Lalande, A. (1972), *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, París, Presses Universitaires de France.

Morales, J., J. Muñoz y A. Oller (2009), "Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos. Una experiencia", *Contextos Educativos,* núm. 12, pp. 137-164.

Nilsson, P. (2007), "Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 66, núm. 3, pp. 293-315.

Nisbet, S. y A. Williams (2009), "Improving students' attitudes to chance with games and activities", *Australian Mathematics Teacher,* vol. 65, núm. 3, pp. 25-37. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de www98.griffith.edu.au/dspace/bitstream/handle/10072/29460/57819_1.pdf?sequence=1

Oldfield, B. (1991a), "Games in the learning of mathematics part 1: a classification", *Mathematics in School,* vol. 20, núm. 1, pp. 41-43.

——— (1991b), "Games in the learning of mathematics part 2: games to stimulate mathematical discussion", *Mathematics in School,* vol. 20, núm. 2, pp. 7-9.

——— (1991c), "Games in the learning of mathematics part 3: games for developing strategies", *Mathematics in School,* vol. 20, núm. 3, pp. 16-18.

——— (1991d), "Games in the learning of mathematics part 4: games for developing concepts", *Mathematics in School,* vol. 20, núm. 5, pp. 36-39.

——— (1992), "Games in the learning of mathematics part 5: games for reinforcement of skills", *Mathematics in School,* vol. 21, núm. 1, pp. 7-13.

Oller, A. y J. Muñoz (2006), "Euler jugando al dominó", *SUMA*, núm. 53, pp. 39-49. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/53/039-049.pdf

Onslow, B. (1990), "Overcoming conceptual obstacles: the qualified use of a game", *School Science and Mathematics,* vol. 90, núm. 7, pp. 581-592.

Pintér, K. (2010), "Creating games from mathematical problems", *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies,* vol. 21, núm. 1, pp. 73-90.

Pulos, S. y C. Sneider (1994), "Designing and Evaluating Effective Games for Teaching Science and Mathematics: An illustration for Coordinate Geometry", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 16, núm. 3, verano, pp. 23-42.

Randel, J., B. Morris, C. Wetzel y B. Whitehill (1992), "The Effectiveness of Games for Educational Purposes: A Review of Recent Research", *Simulation & Gaming,* vol. 23, núm. 3, septiembre, pp. 261-276.

Shillor, I. y B. Egan (1993), "The King Alfred's College maths game: problem solving and mathematical activity", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 24, núm. 3, pp. 313-317.

Sotos, A. E. C., S. Vanhoof, W. Van den Noortgate y P. Onghena (2007), "Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education", *Educational Research Review*, vol. 2, núm. 2, pp. 98-113.

Steinway, L. (1918), "An experiment in games involving a knowledge of number", *Teachers College Record*, vol. 19, núm. 1, pp. 43-53.

Van Oers, B. (2010), "Emergent mathematical thinking in the context of play", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74, núm. 1, pp. 23-37.

Vankúš, P. (2005), "Efficacy of teaching mathematics with method of didactical games in a-didactic situation", *Quaderni di Ricerca in Didattica*, núm. 15, pp. 90-105. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://math.unipa.it/~grim/quad15_vankus_05.pdf

——— (2008), "Games based learning in teaching of mathematics at lower secondary school", *Acta Didactica Universitatis Comenianae. Mathematics*, vol. 8, pp. 103-120.

Wheeler, L. y V. Wheeler (1940), "An experimental study in learning to read numerals", *The Mathematics Teacher*, vol. 33, núm. 1, pp. 25-31.

Zarzar, C. (1982), "Un algoritmo para armar el cubo mágico", *Perfiles Educativos*, núm. 16, pp. 13-21. Recuperado el 4 de septiembre de 2014 de http://132.248.192.201/seccion/perfiles/1982/n16a1982/mx.peredu.1982.n16.p13-21.pdf

ANEXO

Investigaciones empíricas relativas a los efectos del uso de juegos en la clase de matemáticas.

Investigaciones en nivel básico. Estudiantes menores a 15 años			
Autor y eje temático	**Tipo de juego**	**Muestra y/o características**	**Observaciones y resultados**
Bright, Harvey y Wheeler (1979) Juegos para practicar multiplicaciones.	Juegos de multiplicación y división.	612 participantes de 4º a 6º grado de primaria. Duración de 10 días en el aula.	Los estudios realizados demuestran que los juegos pueden ser una forma efectiva de practicar las tablas de multiplicar. Es necesario más trabajo para comprender otros efectos cognitivos de los juegos.
Gairín (1990) Efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. Opiniones de los profesores.	Juegos de conocimiento y juegos de estrategia.	58 profesores de educación básica. Durante un año se realizan juegos para aplicar en las aulas.	Los docentes califican las actividades con juegos como amenas y útiles. Es necesario que el profesor practique el juego antes de presentarlo a los alumnos, así podrá hacer las adecuaciones necesarias y tendrá más posibilidades para ayudar a los alumnos cuando sea necesario.
Onslow (1990) Superando obstáculos conceptuales: el uso calificado de un juego.	Juego de multiplicación y división.	Una muestra de 23 estudiantes de 13 a 14 años, otra muestra de 32 estudiantes de 12 a 14 años. Se analiza una sesión en el aula para cada caso.	Los resultados sugieren que los obstáculos conceptuales no se derribarán solo por el hecho de jugar, es necesario crear una conexión entre el juego y los conceptos o contenidos. Los estudiantes se motivan, quieren mejorar sus estrategias para ganar y participan activamente en el proceso de aprendizaje. Un juego puede propiciar un debate significativo para que los estudiantes adquieran nuevos conceptos.

Investigaciones en nivel básico. Estudiantes menores a 15 años			
Autor y eje temático	**Tipo de juego**	**Muestra y/o características**	**Observaciones y resultados**
Corbalán (1996) Estrategias utilizadas por alumnos de secundaria en la resolución de juegos.	Juegos de estrategia solitarios y bipersonales.	45 estudiantes de 13 a 14 años. El estudio se realiza en el aula de clases.	Los resultados parecen indicar que algunas estrategias de solución de problemas se presentan comúnmente mientras que otras aparecen en menor medida o nulamente. Las técnicas utilizadas en aritmética están más interiorizadas que las técnicas para la geometría o el estudio del azar.
Vankúš (2005) Eficacia de enseñar matemáticas utilizando juegos didácticos en situaciones adidácticas.	Juegos didácticos.	51 estudiantes de 11 a 12 años. Se analizan 17 sesiones de 45 minutos en el aula	El uso de juegos didácticos mejora las actitudes de los estudiantes en torno a las matemáticas y realza la motivación para trabajar durante las lecciones. Los alumnos que trabajaron con juegos didácticos obtuvieron los mismos conocimientos (desde el punto de vista estadístico) en el mismo tiempo que aquellos que trabajaron sin juegos.
Asplin, Frid y Sparrow (2006) Juegos para desarrollar el cálculo mental.	Juego de cartas.	28 estudiantes de 6º grado. Duración de 10 semanas, 4 sesiones a la semana.	Los estudiantes se mostraron entusiasmados en participar. Esta investigación de pequeña escala basada en la observación no puede proporcionar conclusiones sobre el grado en que se fomentó el desarrollo del cálculo mental.
Bragg (2006) Impresiones de estudiantes acerca del valor de los juegos para el aprendizaje de las matemáticas.	Juegos de calculadora.	Se estudia una muestra de 121 alumnos de 5º y 60 grado de una población de 222. Se realizan 8 sesiones en el aula.	Deben crearse medidas para conectar el contenido del juego con los conceptos que desean enseñarse, de acuerdo al plan de estudios y otros aspectos, tales como la resolución de problemas. Los maestros pueden ser alentados a continuar utilizando juegos pero tomando precauciones para asegurarse de maximizar las oportunidades del juego a favor del conocimiento y aprendizaje del alumno.

Investigaciones en nivel básico. Estudiantes menores a 15 años			
Autor y eje temático	**Tipo de juego**	**Muestra y/o características**	**Observaciones y resultados**
Edo y Deulofeu (2006) Juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos.	Juegos de mesa.	4 estudiantes de 2º de primaria. Se estudian 7 sesiones de 40 minutos en un taller de juego y matemáticas.	Aumenta la ayuda mutua; esta es prácticamente inexistente en las sesiones iniciales y es numerosa al final. La organización social en grupos cooperativos incrementa sustancialmente las interacciones centradas en contenidos matemáticos y aumenta la capacidad para resolver errores y dificultades sin intervención del docente. El juego en primaria crea un contexto con una variedad de contenidos matemáticos que permite diversificar los objetivos de aprendizaje de los alumnos.
Bragg (2007) Actitudes conflictivas de los estudiantes hacia los juegos como herramientas para aprender matemáticas.	Juegos de calculadora.	De una población de 222 alumnos de 5º y 6º grado de primaria se estudia una muestra de 121 alumnos. Se realizan 8 sesiones en el aula.	Debe explicitarse la utilidad de los juegos a los niños, también puede invitarse al alumno a reflexionar sobre lo aprendido para mejorar las actitudes en torno a los juegos como herramienta pedagógica. Algunos estudiantes que inicialmente indicaron que los juegos matemáticos ayudan a aprender, después de practicarlos cambiaron de opinión, así que, de acuerdo a las escalas cuantitativas, el juego puede afectar negativamente las actitudes, sin embargo, este no fue necesariamente el resultado en el caso de las entrevistas y otras fuentes de datos cualitativos.
Nilsson (2007) Formas en que los alumnos manejan encuentros de azar en un juego de dados.	Juego de dados.	8 estudiantes de 12 a 13 años. Se analiza una sesión de 70 minutos.	El juego estimula a los estudiantes a adoptar una actitud competitiva. Los estudiantes que no han sido instruidos en probabilidad, de forma espontánea predicen los posibles resultados favorables.

Investigaciones en nivel básico. Estudiantes menores a 15 años			
Autor y eje temático	**Tipo de juego**	**Muestra y/o características**	**Observaciones y resultados**
Vankúš (2008) Juegos de aprendizaje basados en la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de la escuela secundaria.	Juegos didácticos.	103 estudiantes de 11 a 12 años.	El juego motiva a los alumnos a través de la competencia pero también por el ambiente de juego y, en el caso de juegos de estrategia, ellos siguen pensando en la estrategia durante su tiempo libre. Los juegos didácticos aportan en el desarrollo de habilidades de socialización, comunicación, argumentación y uso de razonamiento lógico. El conocimiento de los estudiantes en las clases que utilizaron juegos es estadísticamente igual que el de los estudiantes en cuyas clases no se recurrió al uso de juegos.
Nisbet y Williams (2009) Mejorar las actitudes con juegos y actividades.	Juegos de azar.	58 alumnos de 7º año, se analiza durante dos semanas en el aula.	Se reporta menos ansiedad y mayor motivación en los estudiantes. El proyecto demuestra que las actitudes de los estudiantes pueden mejorar con el uso de juegos y actividades de azar, al menos en el corto plazo.
Gairín y Fernández (2010) Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez.	Juegos inspirados en ajedrez.	150 estudiantes de 2º grado de primaria. 1 sesión de juego de 90 minutos a la semana durante un año.	Es viable mejorar metodológicamente la enseñanza de las matemáticas utilizando material lúdico-manipulativo con elementos de ajedrez. La aplicación incide de manera positiva en el razonamiento lógico y en el cálculo numérico. Las diferencias encontradas en los rendimientos matemáticos demuestran los efectos positivos del material.

Investigaciones en nivel básico. Estudiantes menores a 15 años			
Autor y eje temático	**Tipo de juego**	**Muestra y/o características**	**Observaciones y resultados**
Bragg (2012a) Juegos como herramienta pedagógica para el aprendizaje de los niños.	Juegos de calculadora.	Muestra de 112 alumnos de 10 a 12 años de un total de 224 alumnos. 8 sesiones en el aula.	Jugar tiene un pequeño pero estadísticamente significativo efecto positivo en el desarrollo y comprensión de conceptos matemáticos fundamentales.
Bragg (2012b) Efecto de juegos en el comportamiento respecto a las tareas en el aula.	Juegos de calculadora.	6 alumnos de 9 a 12 años. 10 sesiones en el aula.	Los juegos ayudan a incrementar el tiempo que el estudiante se encuentra concentrado en las tareas desempeñadas en la clase de matemáticas.

Investigaciones en nivel medio superior y superior. Estudiantes de 15 años o más			
Autor y eje temático	**Tipo de juego**	**Muestra y/o características**	**Observaciones y resultados**
Bright (1980) Movimientos de juego y su relación con estrategia y conocimiento.	Juego de suma. Números objetivo.	9 docentes de preparatoria, 9 alumnos que finalizan y 9 que inician un curso de probabilidad en universidad	Parece existir una relación positiva entre el conocimiento de las probabilidades de sumar los números arrojados por dos dados y el uso de la estrategia correcta.
Kraus (1982) Uso de estrategias de solución de problemas en juegos relativos a las matemáticas.	Juegos de estrategia.	10 estudiantes de doctorado y 20 estudiantes de 8º grado.	Distintas estrategias de solución de problemas son usadas por personas que juegan Nim. Por ejemplo: deducción por síntesis, deducción por análisis, ensayo y error sistemático, búsqueda de patrones, revisar trabajo previo, utilización de problemas similares, representaciones pictóricas y dividir en tareas más sencillas. Dado que el juego de Nim no parece ser único, este resultado establece un vínculo entre la resolución de problemas matemáticos y los juegos relativos a la matemática.
Afari, Aldridge y Fraser (2012) Uso de juegos en clases de matemáticas superiores.	Juegos tipo jeopardy.	90 alumnos de nivel superior. Se realizaron 3 observaciones en un periodo de 6 semanas.	Los resultados sugieren que el juego impacta positivamente las actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas. El uso de juegos puede mejorar la participación en clase de los estudiantes.

DATOS DE LOS AUTORES

Angelina G. González Peralta
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California, México
Programa de Matemática Educativa
CICATA-Legaria, Instituto Politécnico Nacional, México
lma.agp@gmail.com

Juan Gabriel Molina Zavaleta
Programa de Matemática Educativa
CICATA-Legaria, Instituto Politécnico Nacional, México
jmolinaz@ipn.mx

Mario Sánchez Aguilar
Programa de Matemática Educativa
CICATA-Legaria, Instituto Politécnico Nacional, México
mosanchez@ipn.mx

ENSAYO

O ensino do conceito de número nas proposições davydovianas e formalista moderna: algumas implicações teóricas

Marlene Beckhauser de Souza y Ademir Damazio

Resumo: No presente artigo analisamos duas propostas de ensino: a davydoviana e a formalista moderna, no que se refere à introdução do conceito de número, no primeiro ano do Ensino Fundamental. O problema de pesquisa é expresso no seguinte questionamento: Em que se distingue o ensino do conceito de número, para o primeiro ano escolar do Ensino Fundamental, objetivado nas proposições davydovianas em relação às tendências em Educação Matemática com fundamento formalista moderno? As referências da análise adotadas foram: o livro didático das duas proposições e o manual do professor da proposição davydoviana. Para tanto, esta pesquisa caracteriza-se na modalidade documental e tem como base teórica a Teoria Histórico-Cultural. As duas propostas de ensino se distinguem, em método e conteúdo, que tem como consequência: o desenvolvimento do conhecimento empírico, na proposição formalista, e do conhecimento teórico, na proposição davydoviana.

Palavras-chave: proposição davydoviana, proposição formalista moderna, número.

The teaching of the concept of number in the Davydovian and in the modern formalist propositions: some theoretical implications

Abstract: In this paper we analyze two teaching propositions: the Davydovian and the modern formalist, in relation to the introduction of the concept of number in the first year of the primary school. The research problem is expressed in the following question: What is distinctive in the teaching of the concept of number, in the first year of the primary school, according to the Davydovian propositions in contrast to the modern formalist Mathematics Teaching? We

Fecha de recepción: 17 de junio de 2013; fecha de aceptación: 17 de agosto de 2014.

adopted as reference for the analysis: the text book of the two propositions and the teacher's manual of the Davydovian proposition. Thus, this work can be characterized as a documental research and has as its theoretical basis the historical cultural theory. Both teaching propositions differ in method and content, which has as consequence: the development of the empirical knowledge, in the formalist proposition, and the theoretical knowledge, in the Davydovian proposition.

Keywords: Davydovian proposition, modern formalist proposition, number.

AS PROPOSTAS DAVYDOVIANA E MODERNISTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

A proposta de ensino de Davydov[1] tem sido indicada como referência ímpar de possibilidade de superação do atual estado crítico da educação escolar. Davydov (1988) diz que o ingresso da criança na escola imprime-lhe mudanças e responsabilidades, ao inserir-se na "atividade de estudo", que lhe possibilita a apropriação dos conceitos científicos. Isso requer um modo de organização do ensino, que contemple: tarefas de estudo, ações de estudos, tarefas particulares, executadas por determinadas operações.

Para Davydov (1988), a educação e o ensino têm papel decisivo no desenvolvimento do pensamento teórico das crianças, mediado pelo conceito científico, entendido como um reflexo do ser e procedimento da operação mental. Por isso, que a presença da criança na escola só tem importância se promover a formação intelectual.

Libâneo e Freitas (2013) entendem que o ineditismo da proposta Davydov não está só em relação àquelas que ele denomina de tradicionais, voltadas à formação do pensamento empírico, mas por aprimorar a teoria pedagógica de fundamento histórico-cultural. Para Carpay (2011), o diferente da proposta é oportunizar ao pré-adolescente o pensar discursivamente e tornar-se plenamente desenvolvido. O valor da proposta, para Schmittau e Morris (2004), está no foco ao desenvolvimento pensamento algébrico.

Para explicitar o pressuposto do caráter inovador da proposta de Davydov, tomamos como referência outra proposição: Movimento da Matemática Moderna, em voga no início da segunda metade do século passado, como algo inédito e superador do ensino formalista clássico, até então predominante (Fiorentini,

[1] Em todo o texto, a escrita "Davydov" diz respeito a nossa alusão ao autor, enquanto as demais notações atendem fielmente a forma que aparece na referência citada.

1995). Essa referência, como contraponto, decorre dos depoimentos dos pesquisadores do GPEMAHC[2] de que é comum seus interlocutores a enquadrar no Movimento da Matemática Moderna.

Tal proposta nasce no contexto dos matemáticos. Em termos educacionais, estabelece diálogo com a Pedagogia, Filosofia e Psicologia. Sua objetivação requereu ações de âmbito mundial. Uma delas a criação, em 1950, da Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (Valente, 2006). No Brasil, a Matemática Moderna traz dupla associação em termos de concepção. Uma delas de ordem de conteúdo de ensino, que remente à inclusão da teoria dos conjuntos e das estruturas algébricas. A outra ligada às questões pedagógicas, em virtude das razões do seu insucesso (Búrigo, 2010). Valente (2006) destaca duas marcas da proposta modernista: as impressões entre os professores, pais e alunos pela reformulação dos conteúdos usuais da matemática escolar, trazendo a teoria dos conjuntos; e compatibilização curricular da Matemática com os trabalhos de Jean Piaget.

Esse contexto propicia a formulação da questão de estudo: Existe diferença(s) essencial(is) entre o que propõe Davydov e a formalismo moderno para o ensino do conceito de número no primeiro ano do Ensino Fundamental? Por decorrência, algumas perguntas auxiliares se fizeram necessárias 1) Quais os elementos peculiares das duas propostas? 2) Qual é a essência, o geral de ambas as propostas? Pelas suas peculiaridades, o estudo se caracteriza como documental. As fontes de análise foram: 1) da proposição davydoviana, o manual do professor (Горбов; Микулина; Савельева, 2008) e o livro didático (Давыдова *et al.*, 2012); 2) da tendência formalista moderna, livro didático *Matemática Moderna* (Magnusson Júnior). Nesta obra não consta a data de publicação, por isso, adotamos o ano 1975 que consta no livro da terceira série de mesma edição e de similar apresentação. A adoção dessa obra como referência de análise se justifica por ter sido recomendada pelo Instituto Brasileiro de Estudos Pedagógicos (IBEP). Para estabelecer relações que explicitam as bases das duas propostas, adotamos como referência alguns exercícios do livro de Magnusson Júnior (1975) e destacamos tarefas particulares da proposta davydoviana que, a primeira vista, impressionam como similares entre ambas.

[2] "Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: Uma abordagem Histórico-Cultural", cadastrado no Diretório Lattes de Grupo de Pesquisa do CNPq. Brasil.

A PROPOSTA MODERNISTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

O conceito de número na tendência formalista moderna, como veremos no decorrer do texto, se insere em um sistema conceitual que tem o conceito de conjunto como essencial e a relação ou correspondência de biunivocidade de seus elementos a ideia central. Como decorrência, aparece o conceito de equipotência. Parece oportuno destacar que o diferencial dessa nova proposta para a Matemática está na teoria de Cantor que, para Bourbaki (1969), tem como fundamento no novo conceito: conjunto, que delineia a ideia de estruturas (ordem, topológica e algébrica). "A noção de conjunto é o alicerce do edifício da matemática, tal como hoje conhecemos" (Revuz, 1967). A correspondência biunívoca entre os elementos de diferentes conjuntos é a base para a definição de número natural como a propriedade comum de conjuntos entre os quais é possível estabelecer a referida relação (Sangiorgi, 1969). A aprendizagem do conceito de número em sua concepção moderna demanda um corpo de experiência no qual se confluem conceitos da lógica, dos conjuntos e dos números. "As relações entre conjuntos conduzem a considerações de natureza *lógica*, ao passo que as propriedades dos conjuntos levam a considerações de natureza *matemática*" (Dienes, 1967, p. 15).

A obra de Magnusson Júnior (1975) constitui-se como manifestação da implantação da ideia modernista da Matemática. O ponto de partida que coloca o estudante em situação de aprendizagem do conceito de número é a correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos. De início, os exercícios requisitam da criança a observação, a ação visual e manual de ligar os elementos de dois conjuntos.

Essa ênfase se explicita na primeira proposição (figura 1). A correspondência entre os elementos aparece pronta por meio de flechas em duplo sentido, indicadora da biunivocidade. Destaca dois conjuntos: de pontos em correspondência, por meio de flechas, com o de pessoas (homem, mulher, menino, menina e bebê) e seus pertences (pasta, bolsa, bola, boneca e chocalho).

Em termos pedagógicos, a característica predominante, nessa proposição, é o espontaneísmo a que são submetidos os estudantes pela ausência de enunciados ou questionamentos orientativos. A direção para a sua execução aparece implicitamente na própria proposição, ao se apresentar resolvida. Portanto, funciona como uma espécie de "modelo a ser seguido" pelos alunos. A não diretividade na própria proposição, pode ocorrer que, tanto o professor quanto as crianças, interpretem de forma peculiar e não condizente com os verdadeiros

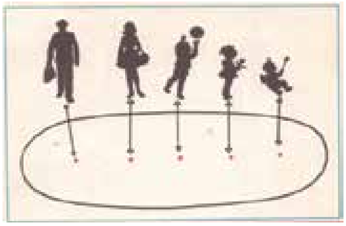


Figura 1. Correspondência entre elementos (Magnusson Júnior, 1975)

objetivos que conduzem à apropriação do conceito em estudo. Ou seja, não fazem o percurso concernente aos fins que se propôs, o que aumenta a possibilidade dos estudantes entrarem em processo prioritariamente de desenvolvimento do pensamento empírico relativo ao conceito de biunivocidade e do conceito de número. Por exemplo, ao adotar – a partir da observação da primeira proposição – o procedimento sugerido, corre o risco da criança se apropriar somente da operação de ligar o elemento de um conjunto com o correspondente de outro por uma linha. Sendo assim, o traçado passa a ser a centralidade conceitual, em vez do pretenso essencial que, para o autor, seria o conceito de número natural. Desse modo, o que fica é o aparente – a linha, os elementos dos conjuntos, o diagrama – em detrimento do pensamento conceitual. A diretividade é imprescindível quando se almeja que os estudantes se apropriem das significações de um determinado conceito matemático. Para Davydov (1982) é premente essa atribuição do professor, que deve ser reproduzida no próprio método, principalmente, ao se propor a iniciação de um novo conceito.

As proposições de Magnusson Júnior (1975) – introdutórias do conceito de número – revela uma base empírica, ao requer do estudante apenas a observação do aparente, nos conjuntos (elementos e o traçado da linha que os unem). Essa ideia se apresenta na situação a seguir (figura 2) que traz o enunciado "Quantos?", como elemento essencial para apresentar a relação entre quantidade e signo numérico. A orientação é o próprio exemplo que induz o procedimento a adotar. O objetivo é focar o conceito de 1 ou de 2, com a ideia de elemento como agrupamento.

A proposição (figura 3) retoma à pergunta "Quantos?" referente ao 3 (três), com a ideia de decomposição. Cada uma das situações é constituída de um conjunto com três elementos, delimitados por diagramas pontilhados, caracterizando subconjuntos que compõem a referida quantidade. Externamente, a cada um dos conjuntos estão quadrados, em cujas superfícies aparecem os numerais

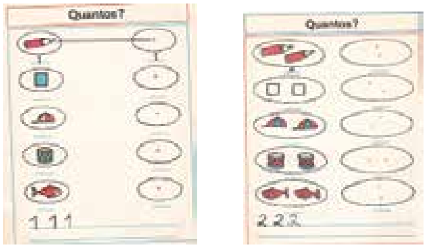


Figura 2. Proposição introdutória para a apresentação do numeral 1 (um) e 2 (dois) (Magnusson Júnior, 1975)

correspondentes ao total de elementos do conjunto e de seus dois subconjuntos. A exceção fica para o último conjunto, composto pelos subconjuntos de três elementos e o vazio, que não traz o '0' (zero) no devido quadrado. Sendo assim, coloca a criança a mercê de procedimentos, pois trata-se de uma situação conceitual nova que conclama a intervenção do professor.

O conceito de zero traz a ideia de ausência de quantidade, no âmbito de um subconjunto sem elemento. Porém, assim como 1 e 2, também compõe o 3, ou seja: 2 e 1, 1 e 2, 1 e 1 e 1, além de 3 e 0. A última situação da proposição apresenta o zero como primeiro elemento da sequência, em forma de tabela: as linhas da primeira coluna e segunda colunas contém, respectivamente, a quantidade elementos (triângulos) e o numeral correspondente; na terceira coluna, com exceção da primeira linha que está completada com a palavra 'zero', compete à criança escrever o nome dos numerais.

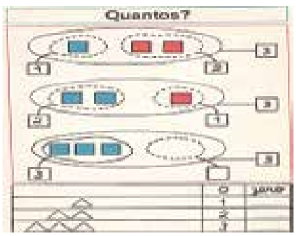


Figura 3. Proposição que introduz o zero no contexto do três (Magnusson Júnior, 1975, p. 65)

A proposição introdutória do seis (figura 4) compõem de três situações. A primeira ainda requer a relação biunívoca entre os conjuntos. A segunda e a terceira trazem algo ainda não abordado: a adição associada à intersecção de dois conjuntos. Nelas são destacadas duas operações, em que uma das parcelas é a quantidade dos elementos incomuns e a outra dos comuns a ambos os conjuntos. Elas têm um caráter ilustrativo, contempla muito mais uma variação de tipos de situações a serem analisadas pelas crianças do que uma preocupação com apropriação do conceito de subconjunto e sua significação própria relacionada à operação de adição.

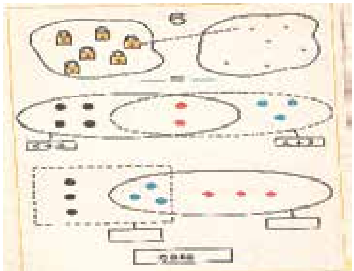


Figura 4. Proposição introdutória da adição associada à intersecção de conjuntos (Magnusson Júnior, 1975, p. 80)

Outra distinção, no âmbito do ensino de 6 (seis), é a apresentação da reta numérica (figura 5). Tem a característica de ser um tipo diferente de situação – última dentre aquelas que introduzem o referido número – com objetivo de 'revisar' a ordem crescente dos numerais até então focados. É dada pronta com a inclusão de 0, 1, 2, 3 e, aos estudantes, compete apenas completar os espaços destinados aos numerais 4, 5 e 6.

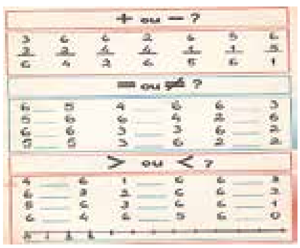


Figura 5. Proposição para identificação de quantidades e apresentação da reta numérica (Magnusson Júnior, 1975, p. 82)

As evidências do modo de organizar o ensino do conceito de número em Magnusson Júnior (1975) trazem a concepção epistemológica de número como propriedade da relação entre elementos de conjuntos equipotentes: a quantidade. Para Dienes (1967, p. 14), "são propriedades dos conjuntos de objetos, e não dos próprios objetos". Contudo, prima pelo que Rosental e Straks (1958, p. 306) denominam de "abstrações elementares que se caracteriza pela sua obtenção por simples comparação para destacar o universal". Trata-se de uma 'abstração vazia' e carente de razão por destacar os aspetos externos não essenciais e secundários do objeto, em detrimento das qualidades e relações essenciais. A verdadeira abstração não consiste somente na distinção entre o que é comum e idêntico de um grupo de objetos, mas pela evidência de sua essência. A correspondência biunívoca se mantém no desenvolvimento conceitual dos números de 1 a 9. Isso significa a ideia de número como uma propriedade, uma abstração, porém, a pergunta "Quantos?" só é suficiente para indicar a quantidade de elementos do conjunto. Portanto, não dá condições de explicitar a essência do conceito, como concebe o próprio Movimento da Matemática Moderna, uma propriedade.

A PROPOSTA DAVYDOVIANA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

Passaremos à análise do objeto da investigação no âmbito do Sistema de Ensino de Davydov. Trazemos, em linhas gerais, alguns de seus pressupostos. Um deles de que é papel da escola propiciar condições para que a criança se aproprie do número como meio peculiar de comparação entre as grandezas. Estas são consideradas o fundamento genético do número real, tido como de referência para o ensino, mesmo no primeiro ano escolar, Para tanto, explicita o método que evita a "saturação" e dispersão com o estudo:

> propõem-lhes a tarefa de comparar alguns objetos por seu tamanho ou por sua quantidade, com a condição de que não seja de forma imediata e direta. Como fazer? Os alunos se vêm obrigados a buscar um método general para resolver os tais problemas. Com a ajuda do professor, ocorre intentos exitosos, em que são necessárias a medida, a conta e o número. Graças a eles é possível realizar a comparação indireta de grandezas. Depois as crianças aprendem a medir e contar, assimilam o conteúdo do conceito de número (Davydov, 1985, p. 87).

Desde a introdução do conceito de número, na proposta de Davydov, as tarefas particulares são planejadas com base no enfoque científico. Prima pelo procedimento do geral – conceito de grandeza, base essencial do número real – ao particular que se expressa nos diferentes números (naturais, inteiros, racionais e irracionais).

As tarefas particulares iniciais envolvem as características de objetos familiares às crianças, porém não visam o desenvolvimento da capacidade de diferenciá-los pelos seus atributos, mas deles valer-se para a adoção de um objeto que dê condições para atingir algum objetivo referente à formação da ideia geral conceito de número. A primeira tarefa e as demais se apresentam com uma temática, traduzida por um título (figura D1). Explicita as características: cor, forma e tamanho. Traz uma orientação, aos estudantes, além de perguntas que requerem-lhes uma justificativa.

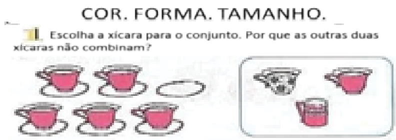


Figura D1. Tarefa introdutória do conceito de número da proposta davydoviana (Давыдова *et al.,* 2012, p. 3)

A tarefa aparenta que sua centralidade é a correspondência um a um. A referida ideia se apresenta com um meio para a solução dos problemas produzidos pela questão ligada à forma, ao tamanho e a cor. Porém, a referência não é para a quantidade ou tem a necessidade de ligar os elementos, delimitados por diagramas, por meio de linhas ou flechas para verificar a biunivocidade. A execução da tarefa exige a atenção para o todo caracterizado por três atributos: ser xícara (forma), do mesmo tamanho, da mesma cor. Outra distinção, em relação ao proposto por Magnusson Júnior (1975), é a possibilidade de participação ativa do estudante, propiciada pela exigência de justificar a indicação de uma determinada escolha e explicar as razões de exclusão das demais.

As tarefas propostas por Davydov e colaboradores propiciam, aos estudantes, a análise que os conduzem à apropriação teórica da relação entre grandezas, considerada a abstração inicial referente ao número real. As relações entre grandezas de mesma espécie se constituem em unidade de singularidades numéricas como os naturais, inteiros, racionais e irracionais. Abarcam comprimento, área, volume, capacidade, massa e quantidade discreta. É a partir delas que as crianças iniciam e desenvolvem o processo de representação em seus níveis: objetal, gráfico e literal. Esse procedimento é adotado ao igualar o maior ao menor, na tarefa da figura D2. Implica na elaboração da conclusão de que é necessário diminuir do maior um valor exatamente igual à diferença do volume de água de um recipiente em relação ao outro. A demonstração ocorre nos segmentos por riscos que indicam a parte diminuída do segmento maior.

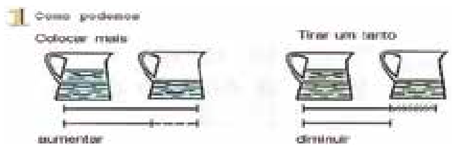


Figura D2. Tarefa indicativa do movimento de aumento ou diminuição de quantidade (Давыдова *et al.*, 2012, p. 22)

Em outro estágio, as tarefas (por exemplo, figura D3) incitam os estudantes a identificar que ocorrera o aumento de volume. A discussão volta-se para a relação entre os dois recipientes e à observação de que havia, inicialmente, o volume A e houve um acréscimo que proporcionou atingir o estado final P. As crianças desenham em seus cadernos a representação e acrescentam as referidas letras nos respectivos arcos.

Figura D3. Tarefa indicativa do movimento de aumento de volume e sua representação literal (Давыдова *et al.*, 2012, p. 25)

De acordo com Davydov (1988), a criança apropria o conceito teórico de número pelo do princípio da igualdade ou desigualdade entre as grandezas. Ela necessita da interação com o objeto para estabelecer a relação e abstraí-las na forma gráfica, com adoção de segmentos. Posteriormente, atinge a forma literal, isto é, a passagem do objeto para um símbolo que extrapola a percepção para algo basicamente mental, promotora do desenvolvimento do pensamento teórico. Expressar por meio de símbolos as relações essenciais entre as grandezas é condição para a reprodução teórica do modelo universal A/B = *n*, ou seja, a abstração que se expressa em fórmulas literais.

A reta numérica, nessa proposta, é de grande importância, pois permite que os estudantes entendam que todo número tem um lugar nela, independente de sua singularidade e da unidade de medida adotada na medição das grandezas. A figura D4 traz a tarefa própria para apresentação da nomenclatura "reta numérica". O manual de orientação (Горбов; Микулина; Савельева, 2008), propõe que o professor conte que Olga e Paulo queriam saber a quantidade de água no tubo representado no desenho. As crianças concluem que A = 8E. A análise volta-se para os desenhos das duas retas. O professor esclarece que a menina fez o desenho antecipadamente e o menino fez o mesmo e acrescentou a cada passo (unidade) o numeral. Ele ainda propõe que uma criança marque o valor A, usando o desenho da Olga e o seu colega o de Paulo. Com ajuda do professor, elas percebem que é mais fácil trabalhar com o segundo desenho, pois os numerais mostram valor, sem recorrer à contagem dos passos. Por fim, a informação: uma reta com os numerais chama-se reta numérica.

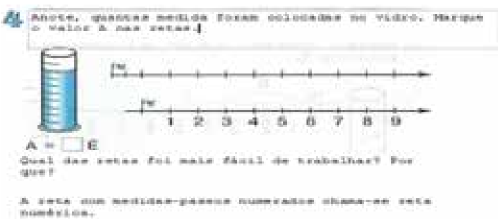


Figura D4. Introdução da reta numérica com os numerais (Давыдова *et al.*, 2012, p. 51)

Em Davydov, a concepção do conceito de zero difere da proposta modernista que o entende como quantidade de elemento de conjunto vazio, ausência de quantidade. Nas proposições davydovianas, depois de várias noções transitadas por várias tarefas anteriores, ao conceito é dedicado em um capítulo, com a atenção voltada à sua inclusão na reta numérica, como o primeiro da ordem crescente dos números. A tarefa da figura D5 torna mais abrangente o significado do zero, ao incluí-lo no sistema conceitual aditivo e na generalização algébrica como subtração de mesmo número ($a - a = 0$).

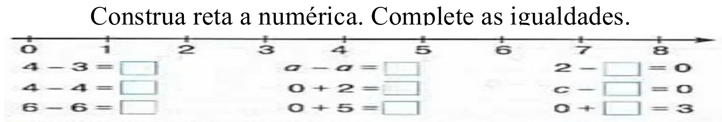


Figura D5. O zero como generalizador do resultado da subtração de mesmo número (Давыдова *et al.*, 2012, p. 89)

As tarefas apresentadas trazem algumas evidências dos princípios de Davydov (1982) referente ao movimento de apropriação do pensamento conceitual em sua relação geral/particular/singular. Também, conforme Rosa (2012), elas refletem interconexões entre as significações algébricas, geométricas e aritméticas do conceito de número.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A base interna geral do conceito de número, abordado no primeiro ano escolar, em ambas as proposições apresentam características distintas. O movimento conceitual de número, referente à proposta davydoviana, conforme Rosa (2012), se expressa no modelo universal pelas fórmulas $A/B = n$ *e* $A = nB$, a unidade entre a *essência universal* − relação de multiplicidade e divisibilidade – que ocorre com base em algo *geral* – grandezas – e a sua expressão *singular* – os diferentes números (naturais, inteiros, racionais e irracionais) − com mediação de uma *particularidade* – a unidade de medida. A inclusão da unidade um número inteiro de vezes na grandeza a medir, o resultado será um número inteiro, se não, é racional. O movimento explicita as interconexões entre as significações algébricas, geométricas e aritméticas do conceito.

A organização do ensino é de modo tal que as tarefas particulares iniciais voltam-se à ação investigadora, por meio de perguntas que os estudantes dirigem ao professor e entre si. As tarefas se articulam pela necessidade de manter o elemento geral do conceito de número, a grandeza. Cada qual se apresenta com alguma peculiaridade que torna cada vez mais complexo o sistema conceitual e a relações de comparação, até atingir um nível de compreensão de medida. Primam pela não repetitividade, pois, caso ocorresse, tornariam passível a condução para a generalização empírica da relação geral e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento empírico.

A organização do ensino de Magnusson Júnior (1975), relativa à Matemática

Moderna, indica um restrito movimento conceitual ao número natural. O conjunto é base genética, suas inter-relações o singular (por exemplo, 4 é uma singularidade) e se expressa no modelo $n(A) = n(B)$, a essência universal (relação de biunivocidade), mediada por uma particularidade, a unidade (elemento discreto do conjunto).

Pedagogicamente, a omissão de enunciado e a objetividade da pergunta em cada proposição têm, implicitamente, um teor indicativo e localizativo. Consequentemente, restringem a exposição da criança a poucas palavras: 'sim', 'não', 'é tal coisa', 'está ali'. As raras situações que requerem uma exposição verbal mais abrangente dos estudantes são contornadas por componentes da linguagem proposicional movida pela bicondicionalidade do tipo $P \leftrightarrow Q$. Sendo assim, cerceiam a oportunidade dos estudantes expressarem os argumentos de suas elaborações. Mas essas condições são pertinentes à própria concepção de número como 'abstração', propriedade dos conjuntos de objetos, que é apropriada em ordem crescente: primeiro o um, depois o dois, e assim sucessivamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Búrigo, E. Z. (2010), "Tradições modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 23, núm. 35B, pp. 277-300.

Carpay, J. (2011), *Developmental Education: from Vygotsky to Davydov: A short reflection on curriculum studies in Russia*, Utrecht, Academie voor Ontwikkelingsgericht Onderwijs.

Davydov, V. V. (1982), *Tipos de generalización en la enseñanza*, La Habana, Editorial Pueblo y Educación.

——— (1985), "Desarrollo psíquico en el escolar pequeño", en A. Petrovski (ed.), *Psicologia evolutiva y pedagógica*, Moscú, Progreso.

——— (1988), *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental*, Moscú, Progreso.

Dienes, Z. P. (1967), *A Matemática Moderna no ensino primário,* Río de Janeiro, Livros Horizontes.

Fiorentini, D. (1995), "Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil", *Zetetiké*, vol. 3, núm. 4, pp. 1-38.

Libâneo, J. C. e R. A. M. M Freitas (2013), "Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico", en A. M. Longarezi y R. Puentes (orgs.), *Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos*, Uberlândia, Edufu, vol. 1, pp. 275-305.

Magnusson Júnior, M. (1975), *Matemática Moderna* (1ª série), São Paulo, Cia. Brasileira de Impressão e Propaganda.

Revuz, A. (1967), *Matemática Moderna Matemática Viva*, Lisboa, Livros Horizontes.

Rosa, J. E. (2012), "Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas", tese de doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná.

Rosental, M. M. e G. M. Straks (1958), *Categorías del materialismo dialético*, México, Grijalbo.

Sangiorgi, O. (1969), *Matemática. Curso Moderno para os ginásios*, São Paulo, Companhia Editora Nacional.

Schmittau, J. e A. Morris (2004), "The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V. V. Davydov", *The Mathematics Educator*, vol. 8, núm. 1, pp. 60-87.

Valente, W. R. (2006), "A Matemática Moderna nas escolas do Brasil: um tema para estudos históricos comparativos", *Diálogo Educacional*, vol. 6, núm. 18, mayo-agosto, pp. 19-34.

Горбов С. Ф., Микулина Г. Г; Савельева О. В. (ВИТА-ПРЕСС) (2008) Обучение математике. 1 класс: Пособие для учителей начальной школы. МоскВа.

Давыдова, В.В; Горбов, С. Ф.; Микулина, Г. Г.; Савельева, О. В. (ВИТА-ПРЕСС) (2012), Математика: Учебник для 1 класс начальной школы. 13-е иэд. МоскВа.

DATOS DE LOS AUTORES

Marlene Beckhauser de Souza
Universidade do Extremo Sul Catarinense, Brasil
neguinhabn@ibest.com.br

Ademir Damazio
Universidade do Extremo Sul Catarinense, Brasil
add@unesc.net

Desafíos para poner en marcha procesos de prueba

Silvia Bernardis y Susana Moriena

Resumen: El objetivo de este artículo es presentar una propuesta para iniciar a los alumnos en las demostraciones geométricas. Para trabajar con los estudiantes en un ambiente de geometría dinámica, describimos una serie de tareas en torno a un problema. Seguimos, para ello, las orientaciones del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. La secuencia está propuesta para estudiantes de los últimos años del nivel secundario (15 a 17 años) y del primer año del nivel superior. Creemos importante aclarar que en nuestro país, la finalización del nivel secundario habilita el inicio del nivel superior. Pensamos que este trabajo previo debería utilizarse para introducir la demostración, herramienta de descubrimiento o de explicación, como una actividad significativa para nuestros alumnos en este nivel educativo.

Palabras clave: exploración, conjetura, explicación, comunicación, prueba.

Challenges to start of proof processes

Abstract: The aim of this article is to present a proposal to introduce students in geometrical demonstrations. We describe a number of tasks around a problem, to work with students in an environment of dynamic geometry. To do this we follow the guidance model of Van Hiele geometric reasoning. The sequence is given to students in their final years of secondary school (15-17 years) and the first year of upper level. Thought this previous work, taking into account other functions of proof as a tool of discovery or explanation, should be used to introduce the show as a meaningful activity for our students in this grade level.

Keywords: exploration, conjecture, explanation, communication, proof.

Fecha de recepción: 9 de febrero de 2014; fecha de aceptación: 1 de noviembre de 2014.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es presentar una propuesta de enseñanza para iniciar a los alumnos en las demostraciones geométricas. Está destinada a estudiantes de los últimos años del nivel secundario (15 a 17 años) y del primer año del nivel superior. Cabe aclarar que en nuestro país el nivel superior es una continuación del nivel secundario. Las tareas se basan en la exploración e investigación a partir de las posibilidades que ofrece la *geometría dinámica*. La aparición de este recurso ha producido una revolución en la enseñanza de la geometría, a punto tal que resulta interesante plantear la exigencia de un cambio en las tareas que habitualmente se proponen. La geometría dinámica permite:

- Desarrollar habilidades de visualización.
- Explorar experimentalmente las construcciones.
- Modificar continuamente las construcciones y realizar el control de los desplazamientos o las deformaciones.
- Obtener fácil y casi inmediatamente numerosos ejemplos con una sola figura y verificar qué propiedades geométricas permanecen invariantes.

En el siguiente cuadro señalamos algunas cuestiones que necesitamos modificar en la enseñanza tradicional.

¿Qué hacemos los docentes?	¿Qué debemos hacer?
Creamos dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas.	Crear la necesidad de *formular sus conjeturas* e investigarlas a fondo a través de la variación continua de las construcciones realizadas con un *software* de geometría dinámica.
Creamos la necesidad de demostrar las propiedades para que todos los casos estén contemplados, dado que el dibujo es uno particular.	Crear la necesidad de *explicar,* a través de las propiedades conocidas, la validez de una propiedad comprobada explorando experimentalmente las construcciones.
Trabajamos unilateralmente la *demostración* como herramienta de *verificación* en geometría.	Trabajar la demostración como *herramienta de descubrimiento* y de *explicación* (De Villiers, 1996).

ENCUADRE TEÓRICO

Uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios y universitarios es que el alumno aprenda a validar sus conjeturas a través de una demostración. Para alcanzarlo, es preciso enseñarle que no todo lo que se visualiza en el dibujo es verdadero. Por ejemplo podemos suponer del dibujo que dos rectas son perpendiculares pero al desplazar puede observarse que esta propiedad no se mantiene. En este sentido, Balacheff (2000a) menciona dos obstáculos respecto de las demostraciones geométricas:

- La evidencia de los hechos que se impone a la razón: los alumnos no experimentan la necesidad de demostrar, ya que las figuras son evidencia de la demostración.
- La enseñanza en matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Por ejemplo, cuando el problema planteado se presenta de la forma "mostrar que...", el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que se está por descubrir es una demostración.

El primer obstáculo puede manifestarse más notoriamente cuando se utiliza un *software* de geometría dinámica en la enseñanza. "Una propiedad geométrica es un invariante perceptual. Esta evidencia perceptual es tan fuerte que incluso puede hacer que los estudiantes no lleguen a entender por qué es necesario demostrar una propiedad. Hasta cierto punto, la eficiencia del *software* ha eliminado la necesidad de la demostración" (Balacheff, 2000b, p. 95). Para sortear el obstáculo, es importante crear en nuestros alumnos la necesidad de explicar la verdad comprobada con el *software;* es decir, la demostración debe funcionar como una explicación a través de las propiedades conocidas (De Villiers, 1996). Mediante la exploración experimental es posible despejar las dudas en torno a la verdad del enunciado, sin embargo será necesario explicar por qué se está cumpliendo.

El segundo obstáculo puede ser sorteado en las actividades a desarrollar en estos entornos si los estudiantes tienen la oportunidad de investigar sobre un problema y descubren determinadas propiedades geométricas. "En matemática, transformar las herramientas que se usan conduce a un cambio de los problemas que resulta interesante plantear, más que a una transformación de la matemática en sí, como muchas veces se ha afirmado" (Balacheff, 2000b, p. 96).

Balacheff (2000a) resalta la importancia que tiene, para producir demostraciones o poner en marcha procesos de demostración, la identificación de un riesgo generado por la incertidumbre en la motivación del individuo. Los desafíos pueden partir de una satisfacción intelectual o de una curiosidad por la verdad que puede motivar a los estudiantes.

El desafío será diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas. "Es importante no retardar indebidamente la primera introducción de la demostración como medio de explicación, ya que los alumnos podrían acostumbrarse a ver la geometría sólo como una acumulación de hechos descubiertos empíricamente en la cual la explicación no tiene ningún rol. Usar la demostración como herramienta de descubrimiento en lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como herramienta de verificación en geometría" (De Villiers, 1996, p. 3).

Para fundamentar el análisis de las posibles respuestas que esperamos de los estudiantes en estas actividades seguimos las ideas de Balacheff (2000a), quien distingue entre explicaciones, pruebas y demostraciones:

- *Explicación:* es todo discurso desarrollado por una persona o un grupo cuyo objetivo es comunicar a otro el carácter de veracidad de un enunciado matemático.
- *Prueba:* son explicaciones aceptadas por otros en un momento dado. Así, una explicación puede tener el estatus de prueba para un grupo social pero no para otro.
- *Demostración:* son pruebas particulares, se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas lógicas.

El autor clasifica las pruebas de los estudiantes en dos categorías: pragmáticas o experimentales y conceptuales o deductivas. Para las pruebas pragmáticas introduce una clasificación en varios tipos:

- *Empirismo naïf:* el procedimiento consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos sin ningún criterio. Es el tipo más elemental de prueba.
- *Experimento crucial:* los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, tan poco particular como les es posible, convencidos de que si se cumple allí, se cumplirá siempre.

- *Ejemplo genérico:* es el caso de procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Los estudiantes empiezan a usar propiedades abstractas en sus pruebas, aunque referidas al ejemplo. Si suprimimos el dibujo usado, la prueba que queda pierde información o carece de significado.

Para las pruebas conceptuales o deductivas, Balacheff distingue los siguientes tipos:

- *Experimento mental:* la explicación se centra en la acción interiorizada, separándola de su ejecución sobre un representante particular. Es una *prueba* deductiva abstracta organizada a partir de manipulaciones de ejemplos concretos. Es posible suprimir los dibujos realizados que acompañan a la prueba, sin que pierda significado.
- *Cálculo sobre enunciados:* son construcciones intelectuales fundamentadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Para situarnos en el nivel de razonamiento de los estudiantes en esta etapa, tuvimos en cuenta el proceso de aprendizaje de la demostración partiendo del análisis de los niveles de razonamiento de Van Hiele; en particular, de las características de cada nivel que tienen que ver con la demostración, y que son las que describimos a continuación (detalles en Jaime y Gutiérrez, 1996):

- *Nivel 1* (Reconocimiento): cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. Se usan propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar o caracterizar figuras.
- *Nivel 2* (Análisis): la demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.
- *Nivel 3* (Clasificación): se comprenden los pasos de una demostración explicada por el profesor. Los estudiantes están en capacidad de repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- *Nivel 4* (Deducción formal): se tiene la capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales.

- *Nivel 5* (Rigor): se tiene la posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual de la geometría euclídea y la capacidad para compararlos y decidir sobre su equivalencia.

El modelo de Van Hiele refleja que el aprendizaje de la demostración es un camino largo que los estudiantes deben recorrer acompañados por el docente.

Según Jaime y Gutiérrez (1996), Van Hiele sugiere la organización de la enseñanza sobre la base de cinco "fases de aprendizaje" para ayudar a los estudiantes a pasar de su nivel de razonamiento actual al siguiente. Describimos las características principales de cada una:

- *Fase 1* (Información): se procede a tomar contacto con el nuevo tema. El profesor tiene la oportunidad de identificar los conocimientos previos que pueden tener sus alumnos y su nivel de razonamiento.
- *Fase 2* (Orientación dirigida): se guía a los estudiantes mediante actividades y problemas para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar.
- *Fase 3* (Explicitación): los estudiantes expresan los resultados que han obtenido, intercambian sus experiencias y discuten sobre ella para lograr un mejor aprendizaje. En esta fase se tendrá en cuenta el permanente diálogo y discusión en todas las actividades.
- *Fase 4* (Orientación libre): en esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas generalmente más complejos.
- *Fase 5* (Integración): los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y sus relaciones, integrando estos nuevos conocimientos, métodos y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

SECUENCIA

La secuencia incluye tareas que tienen el propósito de generar dudas que despierten el interés en los estudiantes por explorar, formular conjeturas, reformularlas y validarlas; es decir enfrentarlos con el problema de la validez, de la eficiencia y de la comunicación de las soluciones. A partir del encuadre teórico, diseñamos una serie de tareas en torno a un problema para el trabajo con los estudiantes. Para ello, ubicamos a los estudiantes en el nivel 3 y organizamos la enseñanza sobre la base de las cinco fases de aprendizaje, siguiendo el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

La secuencia que proponemos está pensada para implementarla en la modalidad de taller, en el laboratorio de informática, utilizando el *software* Geogebra. El trabajo consiste en el desarrollo de las tareas. La estructura de las clases es la siguiente:

- Los estudiantes leen las consignas y trabajan en parejas. Cada pareja intenta resolver las tareas; uno de ellos realiza la construcción en la computadora, mientras que el otro confecciona el auto-protocolo, el cual consiste en escribir notas en las que vaya comentando toda la actividad, los motivos de sus decisiones, etc. (Gutiérrez, 2005).
- Los docentes acompañan la actividad y van evaluando si es necesario dar alguna ayuda.
- Al finalizar la tarea, cada pareja expone su conjetura y su explicación (o prueba), debatiendo con el resto de la clase, con el docente como moderador.

Fase de información

La actividad del taller comienza con una revisión de conceptos previos necesarios para resolver las distintas etapas del problema que plantearemos luego. También recomendamos que los estudiantes exploren los comandos y herramientas del *software* que se utiliza.

Fase orientación dirigida

Tarea 1

Construye el trazado del recorrido que deberá hacer el tren de alta velocidad que unirá las ciudades: Buenos Aires, Rosario y Córdoba, si la empresa que construirá las vías desea minimizar los costos.

Los estudiantes representan la situación planteada utilizando el *software* Geogebra, como se muestra en la figura 1, para poder formular una conjetura respecto del trazado de las vías.

Figura 1

Los estudiantes con la guía del docente exploran la situación a través de las actividades como las siguientes:

- Buscar información con Google Earth.
- Construir una figura que represente la situación.
- Reconocer figuras geométricas y sus propiedades.
- Comprobar algunos recorridos posibles.
- Abordar el problema de manera experimental.
- Tomar como solución algún caso tan poco particular como les sea posible.

Es decir, esperamos obtener respuestas correspondientes al *empirismo naïf* o *experiencia crucial*.

Tarea 2

Ubica un punto E y construye los segmentos EB, ER y EC. Halla la suma de sus longitudes e investiga la ubicación de dicho punto con la condición de minimizar la suma, utilizando la herramienta "desplaza".

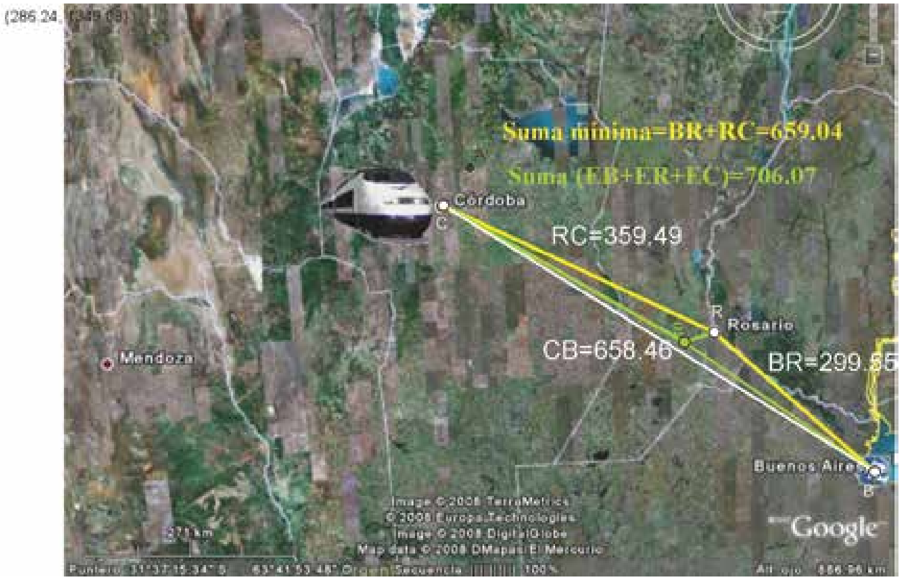


Figura 2

En esta tarea, el *software* les da la posibilidad del desplazamiento continuo de la figura y así pueden observar todas las posibles ubicaciones del punto (figura 2). Esto permite confirmar o no la conjetura inicial. Los estudiantes necesitan explicar las razones de validez de la conjetura, separándose del representante particular (para la ubicación del punto E) que eligieron inicialmente. Suponemos que ante la necesidad de explicar a otros su conjetura y debido a la visualización lograda de la situación, algunos estudiantes pueden usar el tipo de prueba de *ejemplo genérico* o bien de *experimento mental*.

Tarea 3

Investiga cuál es el punto interior al triángulo que cumple que la suma de las distancias a cada vértice del mismo es mínima.

Los estudiantes investigarán que dicho punto se denomina Punto de Fermat. En esta tarea el docente explicará a sus estudiantes la construcción para hallar el Punto de Fermat justificando la propiedad que posee el mismo. La justificación consistirá en la demostración geométrica de la propiedad del Punto de Fermat que describimos a continuación.

Observemos la figura 3. Construimos un triángulo ABC, ubicamos un punto cualquiera P en su interior. Trazamos los segmentos PA, PB, PC. Rotamos el punto P y el vértice B, con un ángulo de 60° alrededor del punto A, obtenemos P′ y B_1. Observemos que los segmentos AP y AP′ son congruentes por ser uno el rotado del otro; lo mismo ocurre con el segmento PB y P′B_1. Luego el triángulo APP′ es isósceles y el ángulo en A es de 60°, por lo tanto dicho triángulo es equilátero. Es decir PP′ es congruente a PA.

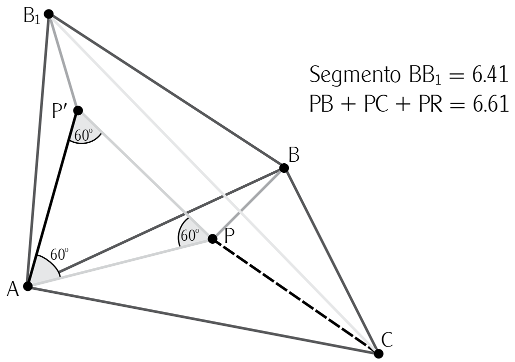


Figura 3

La suma de los segmentos PA + PB + PC es igual a la suma de los segmentos PP′ + P′B_1 + PC, y esta suma será mínima cuando los tres segmentos estén alineados, es decir cuando C, P, P′ y B1 estén alineados en CB_1 (figura 4):

El punto buscado es aquel donde los tres segmentos PA, PB y PC forman ángulos de 120°. En efecto: APC = 180° − APP′ = 180° − 60° = 120° y BPA = B1P′A = 180° − PP′A = 120°. Por lo tanto el ángulo BPC también es de 120°. Lo mismo ocurre si rotamos P y B, un ángulo de 60° alrededor de C, o si rotamos P

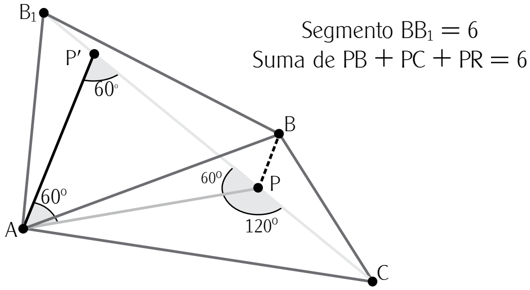


Figura 4

y A, un ángulo de 60° alrededor de B. Finalmente en esta tarea el docente podría solicitar que realicen la demostración utilizando otro vértice del triángulo como centro de la rotación y expliquen la construcción a un compañero.

Con esta demostración hallamos la forma de encontrar el Punto de Fermat. Esto es, construyendo los triángulos equiláteros sobre los lados del triángulo ABC y uniendo cada vértice externo de estos triángulos, con el vértice opuesto del triángulo inicial (figura 5).

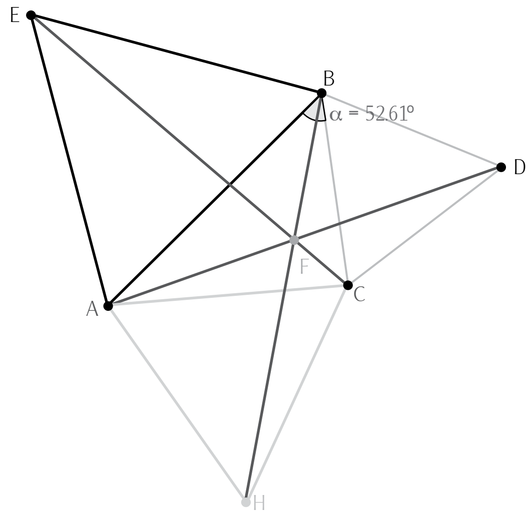


Figura 5

Tarea 4

¿Podríamos utilizar este resultado en el problema planteado?

En la respuesta de los estudiantes es probable que analicen la medida de los ángulos interiores que tiene el triángulo CRB. De esta manera observan que el ángulo en R es de aproximadamente 163° (figura 6).

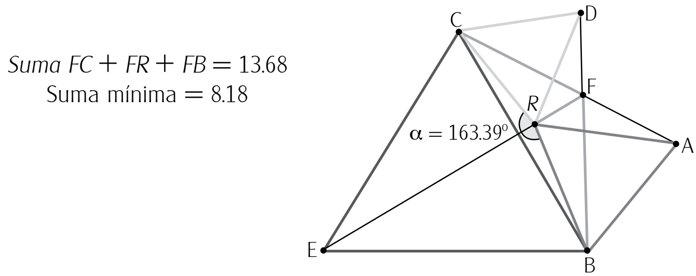


Figura 6

Tienen que investigar lo que sucede en el caso de que el punto F se encuentre fuera del triángulo.

Volviendo a la construcción realizada en la tarea 3, es posible que observen que al desplazar un vértice del triángulo ABC, por ejemplo el punto A, de manera que el ángulo en A mida 120°, el punto F de Fermat se encuentre en un vértice (el que corresponde al ángulo de 120°, en cuyo caso la suma mínima es la suma de las longitudes de dos lados: BA + AC (figura 7).

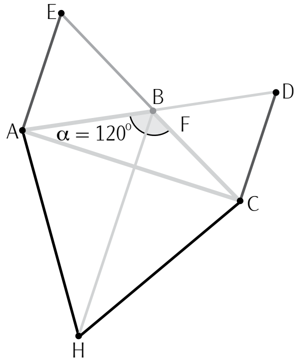


Figura 7

Si el ángulo en B es mayor de 120°, dicho punto F se encuentra fuera del triángulo. En este caso, no existe ningún punto en el que los tres segmentos formen ángulos de 120°, de ahí que el punto debe coincidir con un vértice (el vértice del ángulo obtuso, B) y la suma mínima seguirá siendo la suma de dos lados, AB + BC (figura 8).

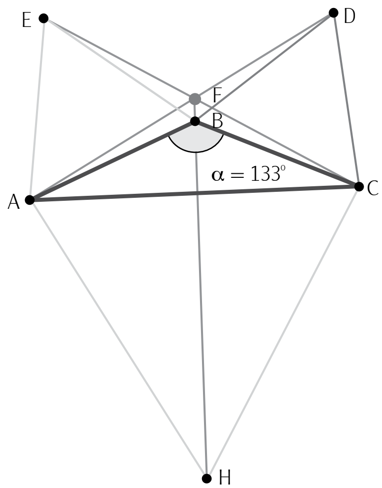


Figura 8

Por lo tanto, suponemos que podrán concluir que la forma de minimizar los costos sería construir las vías de Buenos Aires a Rosario y de Rosario a Córdoba.

En esta tarea los estudiantes necesitarán basarse en propiedades de los objetos geométricos para argumentar la validez de la conjetura. En un esfuerzo de explicación, deberán fundamentar las soluciones propuestas de modo que les permita liberarse de situaciones particulares y pasar a acciones interiorizadas. Suponemos que podrán encaminarse hacia el tipo de prueba de *experimento mental*.

En cuanto a la fase 3 de explicitación, una de sus finalidades es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten lo que han observado, a la par de revisar lo realizado. También tiene la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, perfeccionando la forma de expresarse. Esta fase estará presente a lo largo de toda la secuencia.

Fase orientación libre

Tarea 5

Construye el trazado del recorrido que deberá hacer el tren de alta velocidad, si uniera cuatro ciudades ubicadas en los vértices de un cuadrado y si la empresa que construirá las vías desea minimizar los costos.

En esta etapa los estudiantes deben aplicar los conocimientos y lenguaje utilizados en la fase 2 para resolver la tarea. La idea de estas extensiones del mismo problema es servir de complemento de las actividades realizadas, que podrán dejarse a los alumnos para que resuelvan de manera autónoma (esperando que los estudiantes realicen pruebas de tipo experimento mental y argumenten las soluciones encontradas). Para resolver esta situación, es probable que los estudiante construyan el cuadrado ABCD y hallen su centro O. Podrán ubicarse primero en el triángulo OBD, y buscar el punto que se encuentra a una distancia mínima de los tres vértices, es decir, construir el Punto de Fermat del triángulo OBD (figura 9).

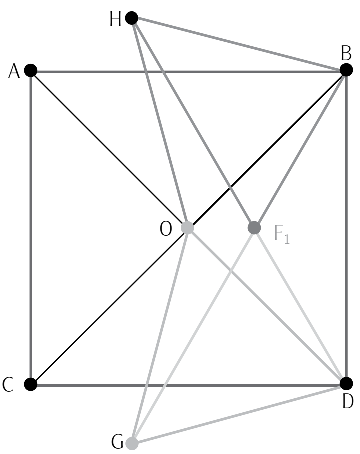


Figura 9

Suponemos que algunos estudiantes podrán utilizar la simetría para encontrar el punto F_2 (figura 10) y construir el trazado de las vías.

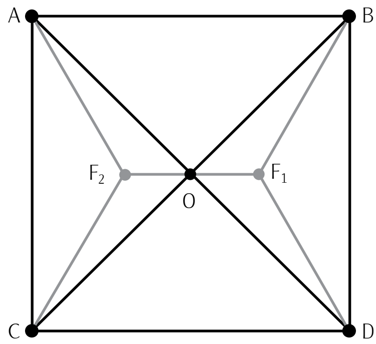


Figura 10

Fase integración

Tarea 6

¿Es posible resolver este problema para cuatro ciudades cualesquiera de nuestro país? ¿El problema tendría solución siempre? ¿La solución sería única?

Para adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionándolos con otros campos que hayan estudiado anteriormente, es necesario condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. Es decir, enfrentarlos a una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

REFLEXIONES FINALES

Es necesario acostumbrar a nuestros estudiantes a justificar sus afirmaciones. Para ello priorizamos la "explicación", entendiendo esta como una forma de mostrar por qué es válida una conjetura en términos de otros resultados geométricos ya conocidos, es decir, cómo "esto" es una consecuencia lógica de "estos otros" resultados.

En este marco de construcción del conocimiento, la enseñanza de la geometría, al utilizar un sistema de geometría dinámica, parte de la base de la resolución de problemas con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir. El docente cambia su papel de director y experto por el de copartícipe, apoyo y coaprendiz (Fisher, 1993).

Pensamos que este trabajo previo tiene en cuenta funciones de la demostración como la de ser una herramienta de descubrimiento o de explicación. Debería utilizarse para introducir la demostración como una actividad significativa para nuestros alumnos en este nivel educativo.

No pretendemos presentar situaciones que permitan al alumno automáticamente realizar demostraciones formales de manera comprensiva, sino actividades que la problematicen debido a la complejidad del aprendizaje de la demostración. Suponemos que algunos alumnos podrán realizar demostraciones deductivas informales sencillas, pero sobre todo queremos lograr que comprendan la *necesidad de demostrar*, y que realicen aquellas que su destreza matemática y su experiencia escolar les permitan. Así como también aprovechen al máximo las ventajas que ofrece la geometría dinámica en este camino.

Consideramos importante, al diseñar secuencias de este tipo, tener presente estas cuestiones:

- Seguir las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
- Aprovechar las ventajas que ofrece la geometría dinámica para ello.
- Proponer enunciados abiertos, sin quitarles a los estudiantes la responsabilidad de la verdad.
- A través de explicaciones, que se irán enriqueciendo en el proceso, iniciar a los estudiantes en la justificación de la validez de sus conjeturas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (2000a), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Bogotá, Universidad de los Andes, Una empresa docente.

——— (2000b), "Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas", en M. Colén, Y. Fraile y C. Vidal (eds.), *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, Barcelona, Graó de Irif, pp. 70-88.

De Villiers, M. (1996), "Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría", en *The Future of Secondary School Geometry, SOSI Geometry Imperfected Conference*, Pretoria, University of South Africa.

Fisher, E. (1993), "The teacher's role", en P. Scrimshaw (ed.), *Language, classrooms and computer,* Londres, Routledge, pp. 57-74.

Gutiérrez, A. (2005), "Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica", en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Córdoba, SEIEM, pp. 27-44.

Jaime, A. y A. Gutiérrez (1996), "El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele", en *El grupo de las isometrías del plano*, Madrid, Síntesis, pp. 85-97.

DATOS DE LAS AUTORAS

Silvia Bernardis
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina
silvia.bernardis@gmail.com

Susana Moriena
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina
smoriena@yahoo.com.ar

Árbitros 2014

Nombre	Institución	País
Martín Acosta Gempeler	Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Colombia
Luis Manuel Aguayo	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Zacatecas	México
Minerva Aguirre	Universidad Autónoma de Nuevo León	México
Alejandra Ávalos	Escuela Normal Superior de México	México
Pilar Azcárate	Universidad de Cádiz	España
Bertha Barquero	Universidad de Barcelona	España
Cristianne Butto	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Ajusco	México
Alberto Camacho	Instituto Tecnológico de Chihuahua II / Universidad Autónoma de Chihuahua	México
Patricia Camarena	Instituto Politécnico Nacional	México
Leonor Camargo	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Walter Castro	Universidad de Antioquia	Colombia
José Luis Cortina	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Ajusco	México
Abraham Cuesta Borges	Universidad Veracruzana	México
Bruno D'Amore	Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Colombia
Nielce M. Lobo da Costa	Universidade Bandeirante	Brasil
Natalia de Bengoechea	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Ajusco	México
Enrique de la Torre Fernández	Universidad de La Coruña	España
María Fernanda Delprato	Universidad Nacional de Córdoba	Argentina
Juan Díaz Godino	Universidad de Granada	España
Daniel Eudave	Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Ceneida Fernández	Universidad de Alicante	España

Nombre	Institución	País
Ana Cristina Ferreira	Universidade Federal de Ouro Preto	Brasil
Conceição Ferreira Reis Fonseca	Universidade Federal de Minas Gerais	Brasil
Ángel Homero Flores	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Cecilio Fonseca	Universidad de Vigo	España
Silvia García Peña	profesionista independiente	México
José María Gavilán	Universidad de Sevilla	España
Fernando Hitt	Universidad de Quebec en Montreal	Canadá
Gelsa Knijnik	Universidade do Vale do Rio dos Sinos	Brasil
Víctor Larios	Universidad Autónoma de Querétaro	México
Javier Lezama	Instituto Politécnico Nacional	México
Gonzalo López Rueda	Escuela Normal Superior de México	México
Salvador Llinares	Universidad de Alicante	España
Gustavo Marmolejo	Universidad Distrital Francisco José de Caldas	Colombia
Rafael Martínez Planell	Universidad de Puerto Rico-Campus Mayagüez	Puerto Rico
Mar Moreno	Universidad de Alicante	España
Asuman Oktaç	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados	México
Tomás Ortega	Universidad de Valladolid	España
Gerardo Ortiz	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Rita Otero	Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires-Sede Tandil	Argentina
María del Carmen Penalva	Universidad de Alicante	España
Jesús Pinto Sosa	Universidad Autónoma de Yucatán	México
Nuria Planas	Universidad Autónoma de Barcelona	España
Marcel Pochulu	Universidad Nacional de Villa María	Argentina
Ángela Restrepo	Universidad de los Andes	Colombia

Nombre	Institución	País
Carlos Miguel Ribeiro	Universidade do Algarve	Portugal
Solange Roa	Universidad Industrial de Santander	Colombia
Alejandro Rosas	Instituto Politécnico Nacional	México
Daniel Rosas	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Héctor Rosario	Universidad de Puerto Rico-Campus Mayagüez	Puerto Rico
Norma Rubio Goycochea	Pontificia Universidad Católica del Perú	Perú
Irma Saiz	Universidad Nacional del Nordeste	Argentina
Carmen Samper de Caicedo	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Andrés Sánchez-Moguel	Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación	México
Gloria Sánchez-Matamoros	Universidad de Sevilla	España
Ernesto Sánchez	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados	México
Mario Sánchez	Instituto Politécnico Nacional	México
M. Leonor Santos	Instituto de Educaçao, Universidade de Lisboa	Portugal
Patrick Scott	Comité Interamericano de Educación Matemática	Estados Unidos
Armando Sepúlveda	Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo	México
Lurdes Serrazina	Instituto de Educaçao, Universidade de Lisboa	Portugal
Luis Serrano	Universidad de Granada	España
Natalia Sgreccia	Universidad Nacional de Rosario	Argentina

Política editorial

La revista Educación Matemática es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Adicionalmente, difunde reseñas y contribuciones para la docencia en matemáticas.

OBJETIVOS

Educación Matemática se propone:

- Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Facilitar la comunicación entre investigadores, estudiantes de posgrado y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática en los países iberoamericanos.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, la teoría y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

Educación Matemática está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores de programas y proyectos educativos, evaluadores, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

PRINCIPALES TEMÁTICAS

El contenido de Educación Matemática se orienta principalmente a los siguientes temas:

- Educación matemática en el nivel básico.
- Educación matemática en el nivel preuniversitario.
- Educación matemática en el nivel universitario.
- Los sistemas educativos y las políticas educativas en educación matemática.
- Saberes matemáticos y procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en contextos no escolares.
- Historia y epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones (ensayos, reseñas y contribuciones para la docencia) en español, en las temáticas enlistadas en esta Política Editorial.
- Todos los escritos que se reciben se someten a un proceso de evaluación doble-ciego.
- El Comité Editorial, con base en los resultados de la evaluación de los escritos, se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El Comité Editorial y la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una licencia de publicación no exclusiva que se hará llegar a los autores una vez aprobada la publicación.

PREPARACIÓN DE LOS ESCRITOS

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica los artículos en español y, eventualmente, artículos de investigación en portugués.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN:

- Deberán tener originalidad y rigor, y mostrar, explícitamente, el aparato conceptual y metodológico utilizado.
- Prepararse electrónicamente, en *Word* o en algún otro procesador compatible.

- Deberá tener un máximo de 10 000 palabras, incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Se recomienda ampliamente que en total la extensión del artículo no sea mayor a 30 cuartillas.
- Deberá incluir, también, un resumen de entre 150 y 180 palabras en el idioma en que se haya escrito el artículo (español o portugués). Además, se incluirá una versión en inglés o francés del resumen, y cinco palabras clave en los dos idiomas elegidos.
- En archivo aparte, deberá prepararse una carátula que contenga: *a)* título del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse, explícitamente, si el material ha sido presentado previamente en congresos y ha aparecido de manera sintética [máximo seis cuartillas] en las memorias del mismo), y *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo del escrito. En caso de que el artículo sea aprobado, se enviarán en blanco y negro las fotografías o ilustraciones en formatos .jpg, .tif o .eps, insertos en el documento y también en archivo aparte, con una resolución mínima de 300 dpi.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean conocidas por un lector internacional; si éstas se utilizan, deberá explicitarse su significado a pie de página, la primera vez que aparezcan.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, p. 51).
- Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo.

Briand, J. (2011), "El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 5-36.

Fuenlabrada, I. (compiladora) (2008), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, DIE-CINVESTAV/COMIE/UPN.

Stigler, J. W. y J. Hiebert (1999), *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, Nueva York, Free Press.

Moreno, L y J. Kaput (2005), "Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra", en M. Alvarado y B. Brizuela (compiladoras),

Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia, México, Paidós (Col. Educador 179).

Hernández, S. y H. Jacobo (2011), "Descripción de algunas tesis de maestría en educación matemática", *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* vol. 13, núm. 1. Consultado el 28 de marzo de 2012 en: http://redie.uabc.mx/vol11no1/contenido-hdezjacobo.html

ENSAYOS

Educación matemática publica ensayos de alta calidad con un máximo de 6 000 palabras (y 12 cuartillas incluyendo imágenes y bibliografía), que aborden de manera rigurosa y original algún tema relevante en el campo de la educación matemática. A diferencia de los artículos, los ensayos implican la interpretación de un tema desde el punto de vista del autor, sin que sea necesario explicitar el aparato metodológico o documental específico que lo sustenta, ni aportar datos empíricos. Los ensayos se someten al mismo proceso de arbitraje que los artículos de investigación.

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Educación matemática considera para su publicación un número limitado de contribuciones para la docencia, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios, puntos de vista sobre algún material educativo y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula o de planeación de proyectos en educación matemática que se considere valioso compartir con los docentes de los distintos niveles educativos. Las contribuciones para la docencia no deberán exceder 4 000 palabras o 10 cuartillas incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word, con los mismos lineamientos que para la presentación de artículos.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, *software*, tesis de doctorado y eventos relevantes relacionados con las temáticas de la revista y que hayan aparecido recientemente. Las reseñas deben expresar el punto de vista de su autor; es decir, que no serán meramente descriptivas, y no excederán 2 000 palabras. Asimismo, deben incluir la ficha completa del texto o *software* reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor. En el caso de las reseñas de tesis de doctorado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.

PROCESO DE ARBITRAJE

Aspectos generales

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso de arbitraje.

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna se realiza en un plazo aproximado de un mes. En este término, se notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para su eventual publicación en Educación Matemática, se expondrán, por escrito, las razones al autor.

Artículos y ensayos

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos para ser evaluados serán enviadas para arbitraje doble-ciego de al menos dos expertos en el tema. Este proceso de arbitraje se realizará en un plazo máximo de tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial: Aceptado en su versión original, Aceptado con modificaciones menores, Aceptación condicionada a incorporación de modificaciones mayores, o Rechazado.

El autor deberá responder electrónicamente si está de acuerdo o no en elaborar una segunda versión de su contribución, incorporando los cambios propuestos. La versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, deberá enviarse en un periodo no mayor de tres meses. Si el autor o autores envían su segunda versión en un plazo mayor al estipulado, el escrito será considerado como Nueva contribución, y se reiniciará el proceso de arbitraje.

En e l caso en que un árbitro apruebe una contribución con modificaciones menores y otro la rechace, la contribución se enviará a un tercer revisor. Prevalecerá la opinión de dos, de los tres árbitros.

Contribuciones para la docencia

Las contribuciones para la docencia se someten a un proceso de arbitraje en el que participan como árbitros un miembro del Comité Editorial y un árbitro externo. Los plazos del proceso son los mismos que para los artículos y los ensayos. En caso de discordancia en las evaluaciones, se seguirá un proceso similar al de artículos y ensayos.

Reseñas

Las reseñas son evaluadas por un miembro del Comité Editorial y el resultado de su evaluación se comunica al autor una vez que haya sido discutido en el pleno del Comité Editorial. Para hacer la evaluación, en este caso, se consideran la actualidad y relevancia del objeto de la reseña y la calidad de la perspectiva personal que el autor incorpora en su escrito.

ENVÍO DE LOS ESCRITOS

Los escritos deberán enviarse en archivo electrónico a la siguiente dirección electrónica: revedumat@yahoo.com.mx.

Precio del ejemplar en papel	Institucional	Personal
	$300.00 más gastos de envío	$150.00 más gastos de envío

Educación Matemática

Se terminó de imprimir en los talleres
de Alta Resolución, S. A. de C. V.,
en el mes de diciembre de 2014.
Tel.: (55) 1497-3970

Se imprimieron 100 ejemplares
más sobrantes para su reposición.

Colaboradores internacionales

- *Michele Artigue*, Université Paris 7, IUFM de Reims y equipo DIDIREM, Francia
- *Carmen Azcárate*, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, España
- *Luis Balbuena*, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, España
- *Sergio Ballester Pedroso*, Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona, Cuba
- *Edgar José Becerra Bertram*, Ceneval, México
- *Carlos Bosch*, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México
- *Alberto Camacho Ríos*, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
- *José Contreras Francia*, University of Southern Mississippi, Estados Unidos
- *César Cristóbal Escalante*, Universidad de Quintana Roo, México
- *Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, España
- *José Ángel Dorta Díaz*, Universidad de La Laguna, Departamento de Análisis Matemático, España
- *Daniel Eudave Muñoz*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Departamento de Educación, México
- *Eugenio Filloy Yagüe*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alfinio Flores Peñafiel*, Arizona State University, Estados Unidos
- *Grecia Gálvez*, Ministerio de Educación de Chile, Chile
- *Jesús Roberto García Pérez*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa, México
- *Fredy González*, Instituto Pedagógico de Maracay, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Ángel Gutiérrez*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España
- *Nelson Hein*, Universidade Regional de Blumenau, Brasil
- *José Ramón Jiménez*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, México
- *Moisés Ledesma Ruiz*, Escuela Normal Superior de Jalisco, México
- *Antonio José Lopes*, Centro de Educação Matemática, Brasil
- *Eduardo Luna*, Barry University, Department of Mathematics and Computer Science, School of Arts and Sciences, Estados Unidos
- *Bertha Alicia Madrid Núñez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Armando Martínez Cruz*, California State University Fullerton, Estados Unidos
- *Jorge Martínez Sánchez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Leonel Morales Aldana*, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala
- *Luis Enrique Moreno Armella*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *María del Rocío Nava Álvarez*, Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México, México
- *Josefina Ontiveros Quiroz*, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, México
- *Fidel Oteiza*, Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Chile
- *François Pluvinage*, Universidad de Estrasburgo, Francia
- *Ángel Ruiz*, Universidad de Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Costa Rica
- *Luisa Ruiz Higueras*, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Facultad de Ciencias de la Educación, España
- *María Teresa Rojano Ceballos*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Jorge Sagula*, Universidad Nacional de Luján, Departamento de Ciencias Básicas, División Matemática, Argentina
- *Patrick Scott*, University of New Mexico, Estados Unidos
- *Isabel Soto*, Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, Chile
- *Guadalupe T. de Castillo*, Universidad de Panamá, Panamá
- *Santiago Valiente Barderas*, Escuela Normal Superior de México, México

www.revista-educacion-matematica.com